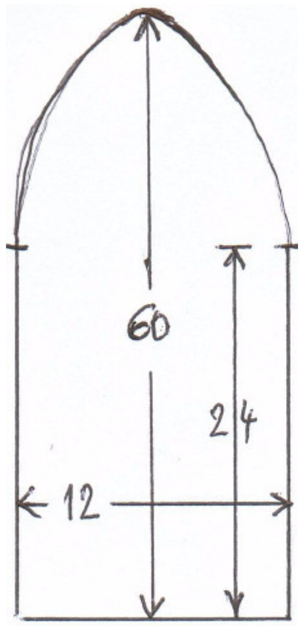
	Punkte
1. Aufgabe  Hans hat eine Uhr bekommen. Er beobachtet, dass der Minutenzeiger von Zeit zu Zeit den Stundenzeiger überholt.	
a) Um welche Zeit zwischen 9 und 10 Uhr stehen die beiden Zeiger genau übereinander? Auf 1/10 Sekunde genau angeben.	4
b) Wie viel Zeit vergeht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Begegnungen der beiden Zeiger? Auf 1/10 Sekunde genau angeben.	4
c) Die Uhr hat natürlich auch einen Sekundenzeiger. Wie oft pro Tag kommt es vor, dass alle drei Zeiger übereinander stehen? Begründung!	4
2. Aufgabe Der dargestellte Rotationskörper (mit vertikaler Rotationsachse) besteht aus einem zylindrischen Unterteil mit aufgesetzem Rotationsparaboloid (parabelförmige Kontur). Berechne a) das Volumen und b) die Gesamtoberfläche des Körpers. Die Masse sind in cm.  	12
3. Aufgabe Der Leistungsverlauf eines Motors sei im Bereich von 1000 - 6000 U/min gegeben durch die Funktion $P(n) = (-3.2\cdot10^{-13}\cdot n^4 + 10^{-9}\cdot n^3 + 6\cdot10^{-6}\cdot n^2 + 0.02\cdot n - 10)$ PS, wo n in U/min einzusetzen ist. (1 PS = 735.5 W, 1 W = 1 Nm/sec) Leistung P und Drehmoment M sind verknüpft durch $P = M\cdot\omega$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit in rad/sec bezeichnet.	
a) Bei welcher Tourenzahl gibt der Motor das maximale Drehmoment ab? Wie gross ist dieses in Nm?	6
b) In welchem Tourenzahlbereich stehen mindestens 90% des maximalen Drehmoments zur Verfügung?	6

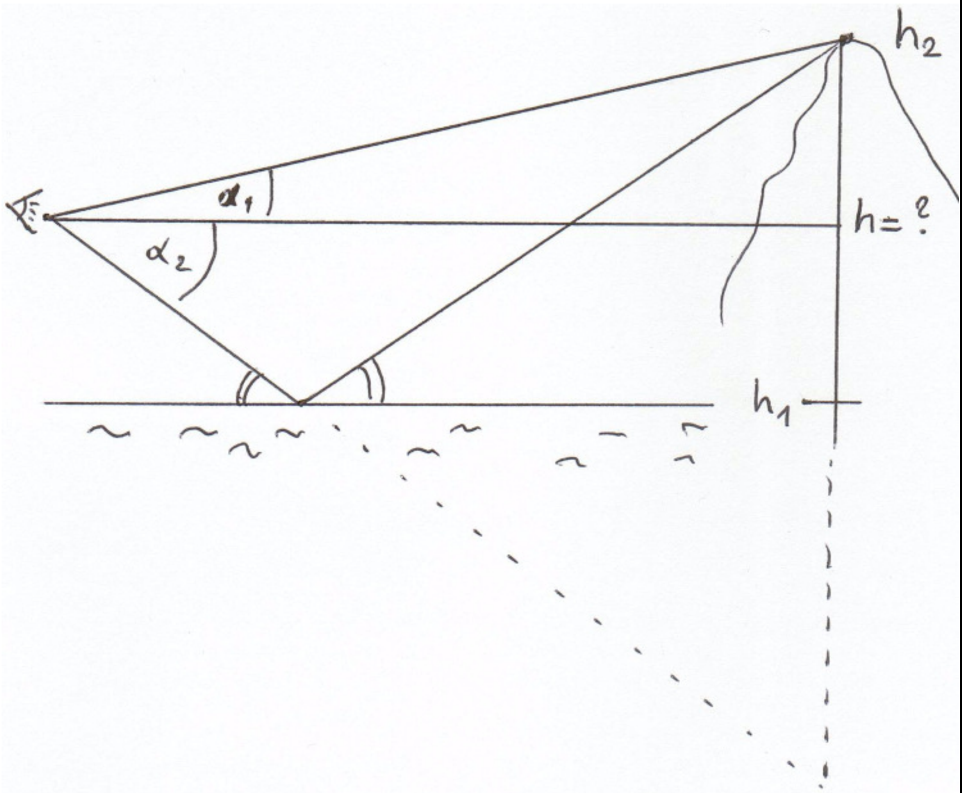
	Punkte
4. Aufgabe	
In einer Schulklasse werden Gewicht und Grösse der Studenten gemessen:	

Student	Grösse/cm	Gewicht/kg
1	178	82
2	169	75
3	172	73
4	177	85
5	171	80
6	181	92
7	184	88
8	176	69
9	176	84
10	174	80
11	190	81

Es wird für beide Grössen Normalverteilung angenommen.

	Punkte
a) Wie viele % Studenten in der Gesamtbevölkerung liegen voraussichtlich zwischen 175 und 185 cm, wenn die Stichprobe repräsentativ ist?	3
b) Wie viele % Studenten in der Gesamtbevölkerung liegen voraussichtlich zwischen 75 und 85 kg, wenn die Stichprobe repräsentativ ist?	3
c) Der Body-Mass-Index (BMI) wird definiert als Gewicht in kg, dividiert durch das Quadrat der Körpergrösse in m. Berechne Mittelwert und Standardabweichung des BMI aus der Stichprobe.	3
d) Wie viele Studenten in einer Klasse von 18 haben voraussichtlich einen BMI von mehr als 25, wenn diese Grösse ebenfalls normalverteilt ist?	3

	Punkte
5. Aufgabe	12



Hans sitzt auf einer Alpweide über einem Bergsee. Das Wetter ist schön. Von seinem Standort aus sieht er die Spitze des Piz Inova direkt unter dem Winkel α_1 = 23° von der Horizontalen und im See gespiegelt unter α_2 = 46°. Von der Karte weiss Hans, dass der Piz Inova eine Höhe von h_2 = 3244 müM hat und der Seespiegel auf h_1 = 1212 müM liegt.

Berechne die Höhe h des Standortes (bzw. Sitzortes)!

Beim Spiegeln gilt: Einfallwinkel = Ausfallwinkel.

(Die gestrichelte Linie soll dazu dienen, der Inspiration nachzuhelfen.)

<u>Bewertung:</u>

Maximal sind 60 Punkte möglich.

$$\text{Note} = \max\left\{1 + \frac{\text{Punkte}}{10}, 6\right\}$$

Lösung Vordiplomprüfung 2014

Aufgabe 1

a) Geschwindigkeiten: $v_{Min} := \frac{360 \cdot deg}{1 \cdot hr}$ $\quad v_{St} := \frac{360 \cdot deg}{12 \cdot hr}$ also $v_{St} = 30 \cdot \frac{deg}{hr}$

Ort (Vorsprung) des Stundenzeigers um 9 Uhr: $\alpha_{9hr} := 270 \cdot deg$

t: Zeit nach 9 Uhr, wo der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt.

$$v_{Min} \cdot t = \alpha_{9hr} + v_{St} \cdot t \qquad t = \frac{\alpha_{9hr}}{v_{Min} - v_{St}}$$

$$t := \frac{9}{11} \cdot hr \qquad t = 49.090909 \cdot min$$

$$mod(t, min) = 5.454545 \cdot sec$$

Antwort: 9:49:05.5

b) Stunden- und Minutenzeiger bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Daraus folgt, dass die Begegnungen sich in gleichbleibenden Zeitabständen folgen.
Um 12:00:00 sind beide Zeiger übereinander. Bis zum nächsten 12:00:00 gibt es 11 Begegnungen, also

$$\frac{12 \cdot hr}{11} = 3927.272727 \cdot sec$$

Man kann es auch komplizierter lösen...

c) Nur um 12:00:00, also zweimal täglich. Die Begegnung von Stunden- und Minutenzeiger bestimmt auch die Sekunden eindeutig.
Beweis, wird nicht erwartet: Stunden- und Minutenzeiger treffen sich bei 0/11, 1/11, 2/11, 3/11 etc. des Vollkreises, Minuten- und Sekundenzeiger bei 0/59, 1/59, 2/59 etc. 11 und 59 sind teilerfremd, sogar beide prim. Es gibt keine Zahlen m<11 und n<59 mit m>0 und n>0 so, dass m/11=n/59, also n/m=59/11 - sonst müsste man 59/11 kürzen können!

Aufgabe 2

Die Punkte (-6|24), (0|60) und (6|24) sind gegeben. Die Funktion der Parabelkontur ist 60 - x^2.

$$V := 2 \cdot \pi \cdot \int_0^6 \left(60 - x^2\right) \cdot x \, dx$$ Volumen (Guldin'sche Formel)

$$V = 4750.088092$$ (in cm^3)

$$A_1 := 2 \cdot \pi \cdot \int_0^6 \sqrt{1 + (-2 \cdot x)^2} \cdot x \, dx$$ Oberfläche des parabolischen Teils (Guldin'sche Formel)

$$A_2 := 12 \cdot \pi \cdot 24$$ Mantelfläche des zylindrischen Teils

$$A_3 := 6^2 \cdot \pi$$ Grundfläche

$$A = \begin{pmatrix} 913.696207 \\ 904.778684 \\ 113.097336 \end{pmatrix} \qquad \sum A = 1931.572227$$ Summe (cm^2)

(Beide Integrale können auch analytisch gelöst werden.)

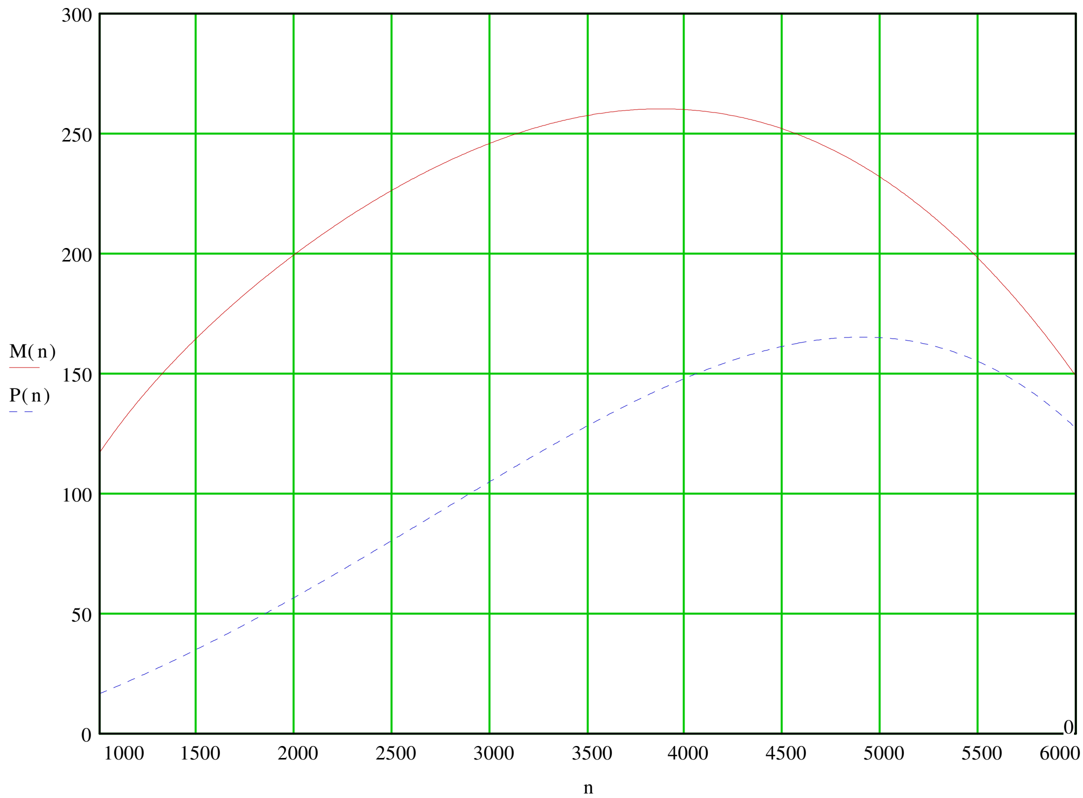
Aufgabe 3

$P(n) := -3.2\cdot 10^{-13}\cdot n^4 + 10^{-9}\cdot n^3 + 6\cdot 10^{-6}\cdot n^2 + 0.02\cdot n - 10$ in PS

$M(n) = \frac{P(n)\cdot 735.5}{\omega} = \frac{P(n)\cdot 735.5}{\frac{n}{60}\cdot 2\cdot \pi}$ in Nm, mit $k := 735.5\cdot\frac{30}{\pi}$ ist $M(n) := k\cdot\frac{P(n)}{n}$

$k = 7023.507639$

$n := 1000..6000$



a) Bestimmung des Maximums von M:

$\frac{P}{n} = -3.2\cdot 10^{-13}\cdot n^3 + 10^{-9}\cdot n^2 + 6\cdot 10^{-6}\cdot n + 0.02 - \frac{10}{n}$ M, Faktor k weggelassen (er hat keinen Einfluss auf die Lage des Maximums)

$n := 3000$ Startwert für Berechnung

$n_{max} := \mathrm{root}\left(-9.6\cdot 10^{-13}\cdot n^2 + 2\cdot 10^{-9}\cdot n + 6\cdot 10^{-6} + \frac{10}{n^2}, n\right)$ Nullstelle der Ableitung von M

$n_{max} = 3875.168217$ Drehzahl bei M_{max}

$M_{max} := M(n_{max})$ $M_{max} = 260.330559$ maximales Drehmoment

b) $M_{90} := 90\cdot\%\cdot M_{max}$ $M_{90} = 234.297503$ 90% von M_{max}

$n_1 := \mathrm{root}(M(n) - M_{90}, n)$ $n_1 = 2677.88692$ untere Grenze für 90% Drehmoment (mit Startwert n=3000)

$n := 5000$ Startwert für zweiten Wert (Kriterium: einer vor und einer nach dem Maximum)

$n_2 := \mathrm{root}(M(n) - M_{90}, n)$ $n_2 = 4951.564144$ obere Grenze für 90% Drehmoment

Aufgabe 4

$$Gr := \begin{bmatrix} 178 \\ 169 \\ 172 \\ 177 \\ 171 \\ 181 \\ 184 \\ 176 \\ 176 \\ 174 \\ 190 \end{bmatrix} \cdot cm \qquad Gew := \begin{bmatrix} 82 \\ 75 \\ 73 \\ 85 \\ 80 \\ 92 \\ 88 \\ 69 \\ 84 \\ 80 \\ 81 \end{bmatrix} \cdot kg$$

$N := last(Gr)$

$N = 11$

$i := 1 .. N$

$Gr_m := mean(Gr)$ $\qquad$ $Gew_m := mean(Gew)$

$$\sigma_{Gr} := \sqrt{\frac{\sum_i \left(Gr_i - Gr_m\right)^2}{N-1}} \qquad \sigma_{Gew} := \sqrt{\frac{\sum_i \left(Gew_i - Gew_m\right)^2}{N-1}}$$

$Gr_m = 177.0909 \cdot cm$ $\qquad$ $Gew_m = 80.8182 \cdot kg$

$\sigma_{Gr} = 6.090231 \cdot cm$ $\qquad$ $\sigma_{Gew} = 6.6456 \cdot kg$

a) $r_1 := \frac{175 \cdot cm - Gr_m}{\sigma_{Gr}}$ $\qquad$ $r_2 := \frac{185 \cdot cm - Gr_m}{\sigma_{Gr}}$

$r_1 = -0.343322$ $\qquad$ $r_2 = 1.298652$

$cnorm(r_2) - cnorm(r_1) = 53.729015 \cdot \%$

b) $r_1 := \frac{75 \cdot kg - Gew_m}{\sigma_{Gew}}$ $\qquad$ $r_2 := \frac{85 \cdot kg - Gew_m}{\sigma_{Gew}}$

$r_1 = -0.875497$ $\qquad$ $r_2 = 0.629264$

$cnorm(r_2) - cnorm(r_1) = 54.476016 \cdot \%$

c) $BMI_i := \frac{Gew_i}{(Gr_i)^2}$

$$BMI = \begin{bmatrix} 25.880571 \\ 26.259585 \\ 24.6755 \\ 27.131412 \\ 27.358845 \\ 28.082171 \\ 25.992439 \\ 22.27531 \\ 27.117769 \\ 26.42357 \\ 22.437673 \end{bmatrix} \cdot \frac{kg}{m^2}$$

Im TI-30X kann der BMI durch eine Formel in der Datentabelle berechnet werden: L1 Grösse, L2 Gewicht, L3=10000*L2/L1².

$BMI_m := mean(BMI)$ $\qquad BMI_m = 25.785 \cdot \frac{kg}{m^2}$

$\sigma_{BMI} := \sqrt{\frac{\sum_i (BMI_i - BMI_m)^2}{N-1}}$ $\qquad \sigma_{BMI} = 1.9179 \cdot \frac{kg}{m^2}$

d) $r_1 := \frac{25 \cdot \frac{kg}{m^2} - BMI_m}{\sigma_{BMI}}$

$r_1 = -0.409304$ $\qquad cnorm(-r_1) \cdot 18 = 11.859148$ -> 12

Aufgabe 5

$\alpha_1 := 23 \cdot deg$ $\qquad \alpha_2 := 46 \cdot deg$ $\qquad h_1 := 1212 \cdot m$ $\qquad h_2 := 3244 \cdot m$

Mit der Horizontaldistanz D als Hilfsgrösse ergeben sich 2 Gleichungen in den 2 Unbekannten D und h:

$\tan(\alpha_1) = \frac{h_2 - h}{D}$ $\qquad \tan(\alpha_2) = \frac{(h_2 - h_1) + (h - h_1)}{D}$

$h := \frac{h_2 \cdot \tan(\alpha_2) - (h_2 - 2 \cdot h_1) \cdot \tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2)}$ $\qquad h = 2062.452334 \cdot m$

Alternativ: 2 lineare Gleichungen in h und D lösen.

$$\begin{pmatrix} h + \tan(\alpha_1) \cdot D = h_2 \\ -h + \tan(\alpha_2) \cdot D = h_2 - 2 \cdot h_1 \end{pmatrix}$$

$A := \begin{pmatrix} 1 & \tan(\alpha_1) \\ -1 & \tan(\alpha_2) \end{pmatrix}$ $\qquad y := \begin{pmatrix} h_2 \\ h_2 - 2 \cdot h_1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} \cdot y = \begin{pmatrix} 2062.452334 \\ 2783.551863 \end{pmatrix} \cdot m$

Auch diese Aufgabe kann man komplizierter lösen durch Berechnung von Seiten und Winkeln der verschiedenen Dreiecke.