Punkte

1. Aufgabe

Gartenarbeit: Wenn Gärtner 1 daran 5 Stunden arbeitet, muss Gärtner 2 noch 7 Stunden arbeiten. Wenn Gärtner 1 7 Stunden arbeitet, bleiben für Gärtner 2 5.2 Stunden, um die Arbeit fertigzustellen. 12

Beide Gärtner erhalten den gleichen Stundenlohn.

Die Arbeit soll in total 10 Stunden erledigt werden, wobei beide Gärtner auch gleichzeitig arbeiten können. Wie viele Stunden müssen 1 und 2 je arbeiten, wenn die Arbeit zu minimalen Kosten erledigt werden soll?

Tip: überlege die Aufgabe mit dem gesunden Menschenverstand, bevor Du anfängst wild zu rechnen!

2. Aufgabe

Hans hat ein Sitometer (das ist ein Gerät mit einem Kompass, mit dem man Azimute messen kann - ein Azimut ist ein Winkel im Uhrzeigersinn von der Nordrichtung aus gerechnet). 12

Von seinem Standort aus sieht er Bergspitze A mit den Koordinaten 612150/202430 unter einem Azimut von 310.4°, Bergspitze B mit den Koordinaten 615870/201320 unter einem Azimut von 48.7°.

Berechne die Standortkoordinaten.

3. Aufgabe

Bei der Qualitätskontrolle von Kugellagerkugeln werden folgende Durchmesser gemessen: 12

5.47, 5.32, 5.35, 5.41, 5.33, 5.37, 5.41, 5.41, 5.39, 5.42.

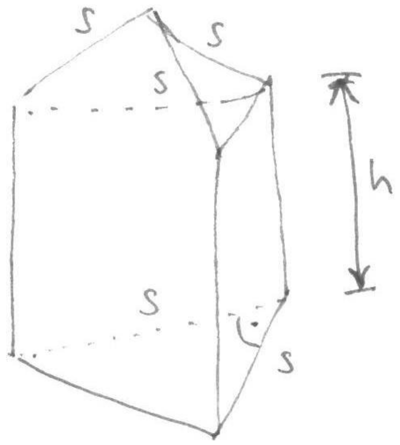
a) Bestimme Mittelwert und Standardabweichung auf 4 Stellen nach dem Komma.

b) Gib das Intervall $[\mu - 1.96\sigma, \mu + 2.576\sigma]$ an.

c) Wie viele % der Werte werden in diesem Intervall erwartet, wenn Normalverteilung angenommen wird?

4. Aufgabe

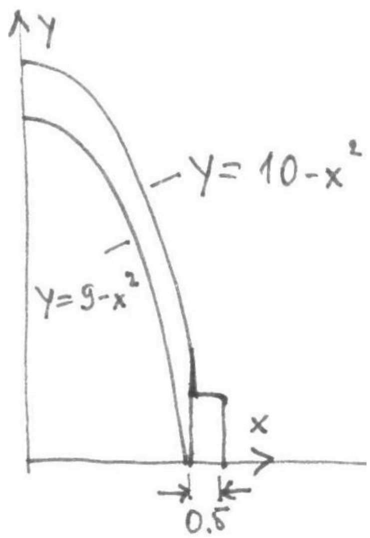
12



Ein Körper gemäss Skizze (halber Vierkantstab mit Spitze) soll bei einer Oberfläche von $0.5m^2$ ein möglichst grosses Volumen haben. Bestimme s und h.

5. Aufgabe

12



Eine Glocke gemäss Skizze wird aus Bronze mit 22% Zinn (7.265 g/cm^3) und 78% Kupfer (8.92 g/cm^3) gegossen. Die Masse sind in cm. Berechne das Gewicht der Glocke.

Bewertung:

Maximal sind 60 Punkte möglich.

$\text{Note} = 1 + \frac{\text{Punkte}}{10}$, maximal Note 6.

Aufgabe 1

Aufgaben, in denen die Zeit vorkommt, müssen über die Leistungen (Geschwindigkeiten) gelöst werden.

$$5\cdot hr\cdot p_1 + 7\cdot hr\cdot p_2 = 100\cdot\%$$

$$7\cdot hr\cdot p_1 + 5.2\cdot hr\cdot p_2 = 100\cdot\%$$

also $M := \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5.2 \end{pmatrix}\cdot hr$ $\qquad y := \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}\cdot\%$

Leistungen: $p := M^{-1}\cdot y$ $\qquad p = \begin{pmatrix} 7.826 \\ 8.696 \end{pmatrix}\cdot\frac{\%}{hr}$

$$\frac{100\cdot\%}{p_1} = 12.778\cdot hr \qquad \frac{100\cdot\%}{p_2} = 11.5\cdot hr$$

Gärtner 1 braucht also allein 12.78 Stunden, Gärtner 2 allein braucht 11.5 Stunden. Gärtner 2 arbeitet schneller als Gärtner 1. Die geringsten Kosten entstehen, wenn Gärtner 2 10 Stunden durcharbeitet und Gärtner 1 den Rest macht.

In 10 Stunden leistet Gärtner 2 $W_2 := 10\cdot hr\cdot p_2$ $\qquad W_2 = 86.957\cdot\%$ der Arbeit.

Für Gärtner 1 bleiben $W_1 := 100\cdot\% - W_2$ $\qquad W_1 = 13.043\cdot\%$ zu tun.

Dafür braucht er noch $\frac{W_1}{p_1} = 1.667\cdot hr$

Aufgabe 2

Eingabedaten: $P_A := \begin{pmatrix} 612150 \\ 202430 \end{pmatrix}$ $\qquad P_B := \begin{pmatrix} 615870 \\ 201320 \end{pmatrix}$

$Azi_A := 310.4\cdot deg$ $\qquad Azi_B := 48.7\cdot deg$

Parameter der Geradengleichungen:

Steigung$_A$ $\quad m_A := \tan(90\cdot deg - Azi_A)$ $\qquad m_A = -0.851$

Achsenabschnitt$_A$ $\quad b_A := P_{A_2} - m_A\cdot P_{A_1}$ $\qquad b_A = 723410.486$

Steigung$_B$ $\quad m_B := \tan(90\cdot deg - Azi_B)$ $\qquad m_B = 0.879$

Achsenabschnitt$_B$ $\quad b_B := P_{B_2} - m_B\cdot P_{B_1}$ $\qquad b_B = -339735.015$

Schnittpunkt: $x_S := \frac{b_B - b_A}{m_A - m_B}$ $\qquad x_S = 614681.296$

$y_S := m_A\cdot x_S + b_A$ $\qquad y_S = 200275.698$

Aufgabe 3

$$R := \begin{bmatrix} 5.47 \\ 5.32 \\ 5.35 \\ 5.41 \\ 5.33 \\ 5.37 \\ 5.41 \\ 5.41 \\ 5.39 \\ 5.42 \end{bmatrix}$$

$$R_m := \mathrm{mean}(R)$$

$$\mathrm{last}(R) = 10$$

$$\sigma := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{last}(R)} \left(R_i - R_m\right)^2}{\mathrm{last}(R) - 1}}$$

Mittelwert: $R_m = 5.388$

Standardabweichung: $\sigma = 0.0459$

Intervall: $R_m - 1.96 \cdot \sigma = 5.298$

$R_m + 2.576 \cdot \sigma = 5.506$

Im Intervall werden 47.5% + 49.5% = 97% erwartet.

Aufgabe 4

Oberfläche: $A = \frac{1}{2}\cdot s^2 + 2\cdot s\cdot h + \sqrt{2}\cdot s\cdot h + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot s\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot s + 2\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\cdot s^2 + \left(\sqrt{2}+2\right)\cdot s\cdot h$

$= 1.866\cdot s^2 + 3.414\cdot s\cdot h$

$A := 0.5\cdot m^2$

$h(s) = \frac{A - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\cdot s^2}{\left(\sqrt{2}+2\right)\cdot s}$ $\quad h(s) := \frac{1}{\sqrt{2}+2}\cdot\left[\frac{A}{s} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\cdot s\right]$ $= 0.293\cdot A/_s - 0.547\cdot s$

Volumen: $V = \frac{1}{2}\cdot s^2\cdot h + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot s^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot s = \frac{1}{2}\cdot s^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+2}\cdot\left[\frac{A}{s} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\cdot s\right] + \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot s^3$

$V = 0.5\cdot s^2\cdot h + 0.118\cdot s^3 = 0.5\cdot s^2\cdot(0.293\cdot A/_s - 0.547\cdot s) + 0.118\cdot s^3$

vereinfacht: $V(s) := \frac{A}{2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}\cdot s + \left[\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}\right]\cdot s^3$ $= 0.146\cdot A\cdot s - 0.155\cdot s^3$

Ermittlung von s aus Ableitung = 0:

$\frac{A}{2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)} + \left[\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}\right]\cdot 3\cdot s^2 = 0$ $= 0.146\cdot A - 0.466\cdot s^2$

also $s^2 = 0.314\cdot A$

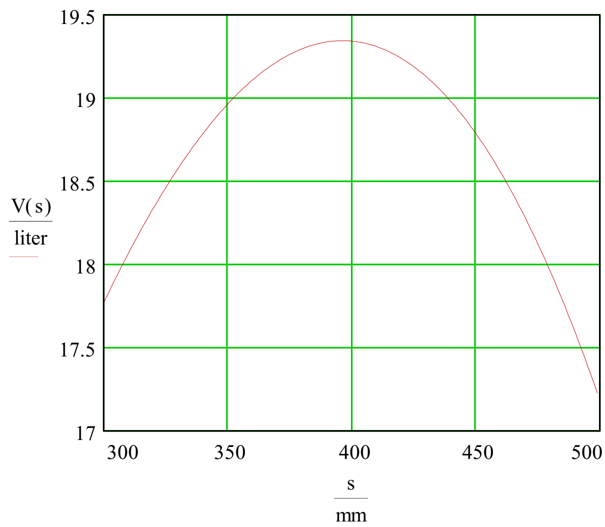
$s := \sqrt{\frac{-\frac{A}{2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}}{3\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}\right]}}$

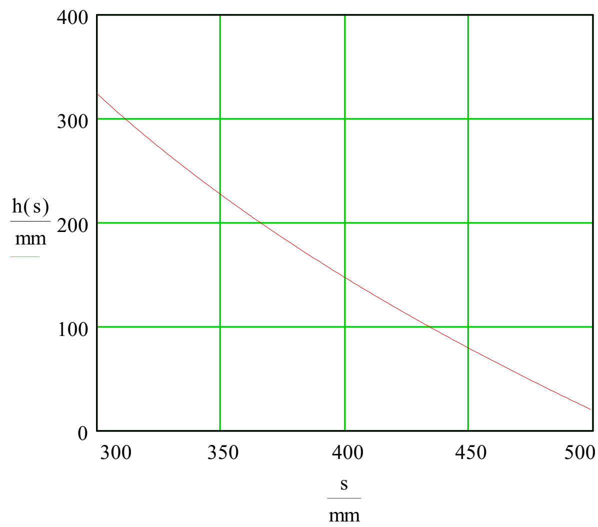
$s = 396.285\cdot mm$

$h(s) = 152.96\cdot mm$

$V(s) = 19.345\cdot liter$

Graphik: $s := 300\cdot mm, 301\cdot mm .. 499\cdot mm$





Aufgabe 5

Fläche zwischen den Kurven: $F_1 = \int_{0\cdot cm}^{3\cdot cm} \left(10\cdot cm - x^2\right) - \left(9\cdot cm - x^2\right) dx$

$F_1 := \int_{0\cdot cm}^{3\cdot cm} 1\cdot cm \, dx$ $\quad F_1 = 3\cdot cm^2$

Schwerpunkt: $x_{S1} := \dfrac{\int_{0\cdot cm}^{3\cdot cm} 1\cdot cm\cdot x \, dx}{F_1}$ $\quad x_{S1} = 1.5\cdot cm$

Angehängtes Rechteck: $F_2 := \frac{1}{2}\cdot cm\cdot 1\cdot cm$ $\quad F_2 = 0.5\cdot cm^2$

Schwerpunkt: $x_{S2} := 3\cdot cm + \frac{1}{4}\cdot cm$ $\quad x_{S2} = 3.25\cdot cm$

Volumen (Guldin'sche Regel): $V := 2\cdot\pi\cdot\left(F_1\cdot x_{S1} + F_2\cdot x_{S2}\right)$ $\quad V = 38.485\cdot cm^3$

$Zinn := 7.265\cdot\frac{gm}{cm^3}$

$Kupfer := 8.92\cdot\frac{gm}{cm^3}$

$Bronze := 22\cdot\%\cdot Zinn + 78\cdot\%\cdot Kupfer$ $\quad Bronze = 8.556\cdot\frac{gm}{cm^3}$

Masse der Glocke: $V\cdot Bronze = 329.27\cdot gm$