Punkte

1. Aufgabe

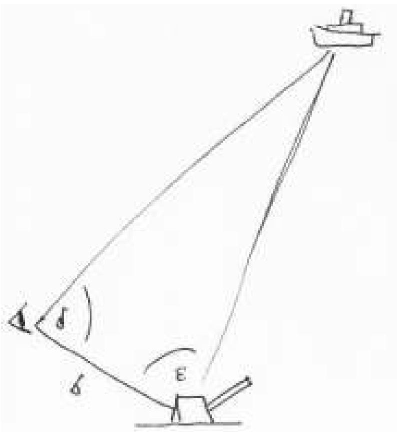
a) Ein Schiff verlässt den Hafen von A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 kn (1 kn = 1 sm/h, 1 sm = 1.852 km) und fährt auf dem kürzesten Weg nach dem 8900 km entfernten B. Von B fährt 1 Tag und 10 Stunden später ein Schiff mit 18 kn nach A. Wie lange nach der Abfahrt des ersten Schiffes sind sie noch 100 sm voneinander entfernt? 3

b) Hans benötigt für eine bestimmte Arbeit 12 Tage. Nachdem er schon 3 Tage hart gearbeitet hat, hilft ihm Patrick, und sie beenden die Arbeit in 4 weiteren Tagen. Wie lange hätte Patrick allein gehabt? 3

c) Ein Wasserbehälter hat zwei Ausläufe, die ihn zusammen in 12 Minuten entleeren. Der erste allein entleert den Behälter in 2 Minuten weniger als der zweite allein. Berechne die Entleerungszeiten beider Ventile einzeln. 4

2. Aufgabe

10



Küstenverteidigung: Ein Geschütz und ein Beobachter, der sich in der Entfernung b = 500 m vom Geschütz befindet, messen gleichzeitig auf ein Ziel die Winkel $\delta = 61°$ und $\varepsilon = 116°$.

a) Wie gross ist die Schussdistanz?

b) Fehlerabschätzung: Um wieviel ist die Distanz in diesem Fall höchstens falsch, wenn beide Winkel einen maximalen Fehler von 3’ (0.05°) haben?

c) Unter welcher Elevation muss das Geschütz ein Geschoss mit v_0 = 300 m/sec abfeuern? Die horizontale Schussweite beträgt

$$s = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha).$$

Punkte

3. Aufgabe

Bei der Qualitätskontrolle von Widerständen werden folgende Werte gemessen: 10

198, 197, 199, 203, 201, 204, 197, 196, 202, 201 Ω.

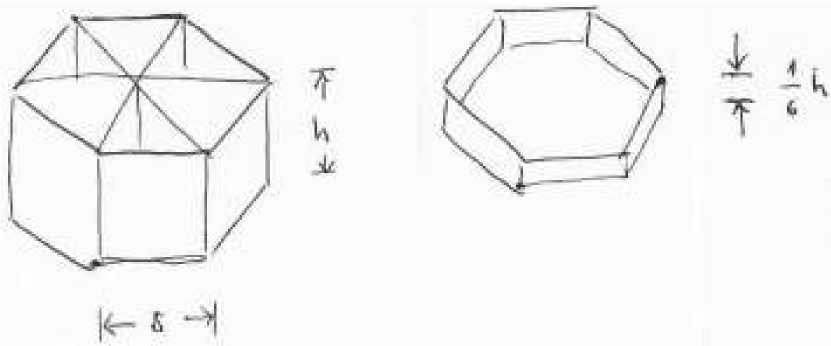
a) Bestimme Mittelwert und Standardabweichung.

b) In welchem Bereich erwarten wir aufgrund dieser Stichprobe 95% der Resultate? (Normalverteilung annehmen)

4. Aufgabe

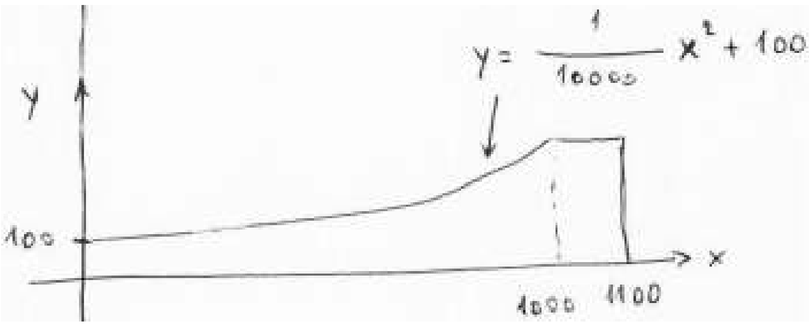
Die Pralinéschachtel (mit separatem Deckel) gemäss Skizze hat ein Fassungsvermögen von 1 Liter. Bestimme Kantenlänge s und Höhe h so, dass ihr Gewicht minimal wird! 10

Die Materialdicke wird vernachlässigt.



5. Aufgabe

Berechne das Gewicht eines um die y-Achse rotationssymmetrischen Parabolspiegels aus Quarzglas mit dem spezifischen Gewicht 2.8 gemäss Skizze! Alle Masse sind in mm. 10



Bewertung:

Maximal sind 50 Punkte möglich.

$$\text{Note} = 1 + \frac{\text{Punkte}}{10}$$ (gerundet auf Zehntelnoten)

Lösung des Mathematik-Vordiploms 2008 (S. Bucher)

Aufgabe 1a

$sm \equiv 1.852 \cdot km$ $\quad D := 8900 \cdot km$ $\quad dt := 1 \cdot day + 10 \cdot hr$ $\quad d := 100 \cdot sm$

$v_1 := 15 \cdot \frac{sm}{hr}$ $\quad v_2 := 18 \cdot \frac{sm}{hr}$

Gleichung: $v_1 \cdot t + v_2 \cdot (t - dt) + d = D$

Lösung: $t := \frac{-\left(-v_2 \cdot dt + d - D\right)}{\left(v_1 + v_2\right)}$ $\quad t = 161.14 \cdot hr$

Aufgabe 1b

$Hans := 12 \cdot day$ $\quad dt := 3 \cdot day$ $\quad t := 4 \cdot day$

Gleichung: $\frac{dt}{Hans} + t \cdot \left(\frac{1}{Hans} + \frac{1}{Patrick}\right) = 1$

Lösung: $Patrick := -t \cdot \frac{Hans}{(dt + t - Hans)}$ $\quad Patrick = 9.6 \cdot day$

Aufgabe 1c

Gleichung: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{12}$ (Leistung pro Minute)

Lösung: $x := \begin{pmatrix} 13 - \sqrt{145} \\ 13 + \sqrt{145} \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} 0.958 \\ 25.042 \end{pmatrix}$

Die zweite Lösung der Gleichung ist die Lösung der Aufgabe (bei der ersten wird die Zeit des zweiten Auslaufs negativ).

1. Auslauf: $x_1 = 25.042$

2. Auslauf: $x_1 - 2 = 23.042$

Aufgabe 2

$b := 500 \cdot m$ $\quad \delta := 61 \cdot deg$ $\quad \varepsilon := 116 \cdot deg$ $\quad v_0 := 300 \cdot \frac{m}{sec}$ $\quad f := 0.05 \cdot deg$

Distanz: $s := \frac{b}{\sin(180 \cdot deg - \delta - \varepsilon)} \cdot \sin(\delta)$ $\quad s = 8355.82 \cdot m$

Fehler: Vorüberlegung: Der Fehler wird aus einer geometrischen Betrachtung am grössten, wenn beide Winkel zu gross sind.

$$\frac{b}{\sin(180 \cdot deg - \delta - \varepsilon - 2 \cdot f)} \cdot \sin(\delta + f) - s = 292.051 \cdot m$$

Abgangswinkel: $\alpha := \frac{1}{2} \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{s \cdot g}{{v_0}^2}\right)$ $\quad \alpha = 32.785 \cdot deg$

Aufgabe 3

$$R := \begin{pmatrix} 198 \\ 197 \\ 199 \\ 203 \\ 201 \\ 204 \\ 197 \\ 196 \\ 202 \\ 201 \end{pmatrix} \qquad R_m := \mathrm{mean}(R) \qquad \sigma := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{\mathrm{last}(R)} \left(R_i - R_m\right)^2}{\mathrm{last}(R)}}$$

Mittelwert: $R_m = 199.8$

Standardabweichung: $\sigma = 2.781$

95%-Vertrauensintervall: $R_m - 1.96\cdot\sigma = 194.349$

$R_m + 1.96\cdot\sigma = 205.251$

Aufgabe 4

Fläche eines Teildreiecks: $F_\Delta := \frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2$

Volumen: $V := 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2\cdot h$ $\qquad h := \frac{2\cdot V}{3\cdot\sqrt{3}\cdot s^2}$

Oberfläche $\quad V := 1\cdot\mathrm{liter}$

$$S(s,h) := 6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2\right) + 6\cdot s\cdot h + 6\cdot s\cdot h + 6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2\right) + 6\cdot\frac{1}{6}\cdot s\cdot h$$

$$S(s) := 12\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2\right) + 13\cdot\frac{2\cdot V}{3\cdot\sqrt{3}\cdot s}$$

$$12\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2\right) + 13\cdot\frac{2\cdot V}{3\cdot\sqrt{3}\cdot s}$$

Ableitung = 0: $6\cdot\sqrt{3}\cdot s - \frac{26}{9}\cdot V\cdot\frac{\sqrt{3}}{s^2} = 0$

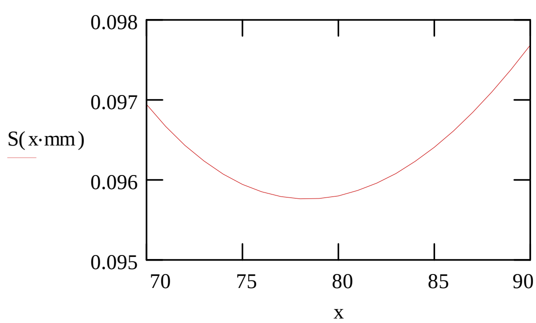
$$s := \left(\frac{13}{27}\cdot V\right)^{\frac{1}{3}}$$

$s = 78.378\cdot\mathrm{mm}$

$$h := \frac{2\cdot V}{3\cdot\sqrt{3}\cdot s^2}$$

$h = 62.656\cdot\mathrm{mm}$

Graphik: $x := 70..90$



Aufgabe 5

$r := 1000$ $\quad$ $Rand := 100$ $\quad$ $f(x) := \frac{1}{10000}\cdot x^2 + 100$ $\quad$ $\rho := 2.8$

Dicke am Rand: $\quad d := f(r)$ $\quad d = 200$

Fläche 1: $\quad F_1 := \int_0^r f(x)\,dx$ $\quad F_1 = 133333.333$

Schwerpunkt 1: $\quad x_{s1} := \frac{\int_0^r f(x)\cdot x\,dx}{F_1}$ $\quad x_{s1} = 562.5$

Fläche 2: $\quad F_2 := Rand\cdot d$ $\quad F_2 = 20000$

Schwerpunkt 2: $\quad x_{s2} := r + \frac{Rand}{2}$ $\quad x_{s2} = 1050$

Gesamtschwerpunkt: $\quad x_s := \frac{x_{s1}\cdot F_1 + x_{s2}\cdot F_2}{F_1 + F_2}$ $\quad x_s = 626.087$

Volumen: $\quad V := 2\cdot\pi\cdot x_s\cdot(F_1 + F_2)$ $\quad V = 603185789.489$

oder: $\quad 2\cdot\pi\cdot(x_{s1}\cdot F_1 + x_{s2}\cdot F_2) = 603185789.489$

Gewicht (in kg): $\quad \frac{V\cdot\rho}{10^6} = 1688.92$