8. 1	3
8. 2	5
8. 3	8x
8. 4	$2 - 27x^2$
8. 5	$3x^2 + 10x$
8. 6	$2x^3 + 9x^2 - 2$
8. 7	$-\frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^2}$
8. 8	Druckfehler: Die Aufgabe sollte lauten $\frac{8}{x^3} - 2x$ $-\frac{24}{x^4} - 2$
8. 9	$3 \cdot x^{-\frac{2}{3}}$
8. 10	$2x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
8. 11	$96x^7 - \frac{12}{x^3} - 3$
8. 12	$f(x) = -3x^3 - 10.5x^2 + 30x + 6$ $f'(x) = -9x^2 - 21x + 30$ $f''(x) = -18x - 21$ Wir bestimmen die Nullstellen der 1. Ableitung und prüfen dort die Vorzeichen der 2. Ableitung: $f'(x) = -9x^2 - 21x + 30 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{3}, x_2 = 1$ $f''(x_1) = -18 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 21 = 39 > 0$ $f''(x_2) = -18 \cdot 1 - 21 = -39 < 0$ x_1 ist Minimum, x_2 ist Maximum.
8. 13	Wie 8.12: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 4x + 12$ $f'(x) = 3x^2 - 16x + 4$ $f''(x) = 6x - 16$ Wir bestimmen die Nullstellen der 1. Ableitung und prüfen dort die Vorzeichen der 2. Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 16x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 5.070, x_2 = 0.263$ $f''(x_1) = 6 \cdot 5.070 - 16 > 0$ $f''(x_2) = 6 \cdot 0.263 - 16 < 0$ x_1 ist Minimum, x_2 ist Maximum.

8. 14	$f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54$ $f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 27$ $f''(x) = 12x^2 - 42x + 18$ Wir bestimmen die Nullstellen der 1. Ableitung und prüfen dort die Vorzeichen der 2. Ableitung: $f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 27 \Rightarrow x_1 = -0.75, x_2 = 3, x_3 = 3$ $f''(-0.75) = 12 \cdot (-0.75)^2 - 42 \cdot (-0.75) + 18 = 56.3 > 0$ $f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 42 \cdot 3 + 18 = 0$ An der Stelle x = 3 müssen wir jetzt noch prüfen, ob die 3. Ableitung = 0 ist: $f'''(3) = 24 \cdot 3 - 42 \neq 0$ x_1 ist Minimum, x_2 ist Sattelpunkt.
8. 15	Produktregel und Kettenregel: $f(x) = x \cdot (a - 2x)^2$ $f'(x) = 1 \cdot (a - 2x)^2 + x \cdot [2 \cdot (a - 2x) \cdot (-2)] = 12x^2 - 8ax + a^2$ Der Faktor -2 ist die (innere) Ableitung von a – 2x.
8. 16	$f(x) = \frac{a}{x}$ $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
8. 17	$f(x) = \frac{a}{x^2}$ $f'(x) = -\frac{2a}{x^3}$
8. 18	$f(x) = x + \frac{a \cdot b}{x}$ $f'(x) = 1 - \frac{a \cdot b}{x^2}$
8. 19	$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{a^2}{x^3}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3a^2}{x^4}$
8. 20	Quotientenregel und Kettenregel: $f(x) = \frac{a \cdot x}{(x+b)^2}$ $f'(x) = a \cdot \frac{1 \cdot (x+b)^2 - x \cdot [2 \cdot (x+b) \cdot 1]}{(x+b)^4} = a \cdot \frac{(x+b) - 2x}{(x+b)^3} = a \cdot \frac{b-x}{(x+b)^3}$
8. 21	Kettenregel: $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{(b-x)^3}$ $f'(x) = 6x + \frac{6 \cdot (-1)}{(b-x)^4} = 6x - \frac{6}{(b-x)^4}$ Der Faktor -1 ist die (innere) Ableitung von b – x.

8. 22	Produktregel und Kettenregel: $f(x) = x^2 \cdot (4a^2 - x^2)^3$ $f'(x) = 2x \cdot (4a^2 - x^2)^3 + x^2 \cdot 3 \cdot (4a^2 - x^2)^2 \cdot (-2x)$ $= (4a^2 - x^2)^2 \cdot (2x \cdot (4a^2 - x^2) - 6x^3)$ $= (4a^2 - x^2)^2 \cdot 8x \cdot (a^2 - x^2)$ Der Faktor -2x ist die (innere) Ableitung von 4a² – x².
8. 23	Quotientenregel und Kettenregel: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + ab}$ $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 + ab) - x \cdot 2x}{(x^2 + ab)^2} = \dfrac{ab - x^2}{(x^2 + ab)^2}$
8. 24	$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^2 - 4) - (x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{10x}{(x^2 - 4)^2}$
8. 25	$f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 4)^2}$ $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 - 4)^2 - x \cdot 2 \cdot (x^2 - 4) \cdot (2x)}{(x^2 - 4)^4} = -\dfrac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3}$
8. 26	$f(x) = \dfrac{x^2 - 4ax}{(x - 2a)^2} = \dfrac{x^2 - 4ax + (4a^2 - 4a^2)}{(x - 2a)^2} = 1 - \dfrac{4a^2}{(x - 2a)^2}$ $f'(x) = 0 - 4a^2 \cdot \dfrac{-2 \cdot 1}{(x - 2a)^3} = \dfrac{8a^2}{(x - 2a)^3}$
8. 27	$f(x) = \dfrac{x^3 \cdot (x^2 - 2a^2)}{(x^2 - a^2)^2} = \dfrac{x^5 - 2a^2x^3}{(x^2 - a^2)^2}$ $f'(x) = \dfrac{(5x^4 - 6a^2x^2) \cdot (x^2 - a^2)^2 - (x^5 - 2a^2x^3) \cdot 2 \cdot (x^2 - a^2) \cdot 2x}{(x^2 - a^2)^4}$ $= \dfrac{(5x^4 - 6a^2x^2) \cdot (x^2 - a^2) - (x^5 - 2a^2x^3) \cdot 4x}{(x^2 - a^2)^3}$ $= \dfrac{5x^6 - 5x^4a^2 - 6a^2x^4 + 6a^4x^2 - 4x^6 + 8x^4a^2}{(x^2 - a^2)^3}$ $= \dfrac{x^6 - 3x^4a^2 + 6a^4x^2}{(x^2 - a^2)^3}$

8. 28	$f(x)=\frac{(a+x)^3}{x}$ $f'(x)=\frac{3\cdot(a+x)^2\cdot x-(a+x)^3\cdot 1}{x^2}=\frac{(a+x)^2\cdot(3x-(a+x))}{x^2}=\frac{(a+x)^2\cdot(2x-a)}{x^2}$
8. 29	$f(x)=\sqrt{\frac{a}{2x}}=\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\sqrt{\frac{a}{8x^3}}$
8. 30	$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ $f'(x)=\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$
8. 31	$f(x)=\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ $f'(x)=\frac{-2\cdot(x-a)}{2\cdot\sqrt{r^2-(x-a)^2}}=\frac{a-x}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}$
8. 32	$f(x)=\sqrt{x^2+(a-x)^2}$ $f'(x)=\frac{2x+2\cdot(a-x)\cdot(-1)}{2\cdot\sqrt{x^2+(a-x)^2}}=\frac{2x-a}{\sqrt{x^2+(a-x)^2}}$
8. 33	$f(x)=x\cdot\sqrt{2a-x}$ $f'(x)=1\cdot\sqrt{2a-x}+x\cdot\frac{-1}{2\cdot\sqrt{2a-x}}=\sqrt{2a-x}-\frac{x}{2\cdot\sqrt{2a-x}}$
8. 34	$f(x)=\sqrt{x\cdot(r-x)^3}=x^{\frac{1}{2}}\cdot(r-x)^{\frac{3}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot(r-x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{2}\cdot(r-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)=\frac{1}{2}\cdot(r-x)\cdot\frac{(r-x)-3x}{\sqrt{x\cdot(r-x)}}$ $=\frac{1}{2}\cdot(r-x)\cdot\frac{r-4x}{\sqrt{x\cdot(r-x)}}$ $=\frac{(r-x)\cdot(r-4x)}{2\cdot\sqrt{x\cdot(r-x)}}$
8. 35	$f(x)=(a+x)\cdot\sqrt{a^2-x^2}$ $f'(x)=1\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{(a+x)\cdot(-2x)}{2\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$ $=\sqrt{a^2-x^2}-\frac{(a+x)\cdot x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

8. 36

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-2a}}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-2a}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x-2a}-x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-2a}}}{x-2a}=\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x-2a}-\frac{x}{2\cdot\sqrt{x-2a}}\right)}{x-2a}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{3\cdot(x-2a)-x}{2\cdot\sqrt{x-2a}}}{x-2a}=\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{x-3a}{\sqrt{x-2a}}}{x-2a}=\frac{\sqrt{x}\cdot(x-3a)}{(x-2a)^{\frac{3}{2}}}$$

8. 37

$$f(x)=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}x^2+1}{x-1}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}\cdot\sqrt{x-1}-\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{\frac{x\cdot(x-1)-\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}\cdot\sqrt{x-1}}}{2\cdot(x-1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x^2-x-1}{2\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}$$

8. 38

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{x}=\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{3}{2}\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x-(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}\cdot(2x^2-1)}{x^2}$$

8. 39

$$f(x)=\frac{(b+x)^2}{x\cdot\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot(b+x)\cdot x\cdot\sqrt{b^2-x^2}-(b+x)^2\cdot\left(1\cdot\sqrt{b^2-x^2}+x\cdot\frac{-2x^2}{2\cdot\sqrt{b^2-x^2}}\right)}{x^2\cdot(b^2-x^2)}$$

$$=\frac{(b+x)\cdot\left(2\cdot x\cdot\sqrt{b^2-x^2}-(b+x)\cdot\left(\sqrt{b^2-x^2}-\frac{-x^3}{\sqrt{b^2-x^2}}\right)\right)}{x^2\cdot(b+x)(b-x)}$$

$$=\frac{2\cdot x\cdot\frac{b^2-x^2}{\sqrt{b^2-x^2}}-(b+x)\cdot\left(\frac{b^2-x^2}{\sqrt{b^2-x^2}}+\frac{x^3}{\sqrt{b^2-x^2}}\right)}{x^2\cdot(b-x)}$$

$$=\frac{b^2x-x^3-b^3+bx^2-bx^3-x^4}{x^2\cdot(b-x)\cdot\sqrt{b^2-x^2}}=\frac{b^2x-x^3-b^3+bx^2-bx^3-x^4}{x^2\cdot(b-x)\cdot\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$=\frac{(x-b)\cdot(b^2-x^2)-x^3\cdot(b+x)}{x^2\cdot(b-x)\cdot\sqrt{b^2-x^2}}=\frac{((x-b)\cdot(b-x)-x^3)\cdot(b+x)}{x^2\cdot(b-x)\cdot\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$=-\frac{((b-x)^2+x^3)}{x^2\cdot(b-x)}\cdot\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}=-\left(\frac{b-x}{x^2}+\frac{x}{b-x}\right)\cdot\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}$$

8. 40	$f(x) = p \cdot 10^{mx-a}$ $f'(x) = p \cdot \ln(10) \cdot m \cdot 10^{mx-a}$
8. 41	$f(x) = \ln\left(x - \frac{a}{2x}\right)$ $f'(x) = \frac{1 + \frac{a}{2x^2}}{x - \frac{a}{2x}} = \frac{2x^2 + a}{2x^2} \cdot \frac{2x}{2x^2 - a} = \frac{2x^2 + a}{x \cdot (2x^2 - a)}$
8. 42	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \cos(2x)$
8. 43	$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(3x)$ $f'(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(3x) \cdot 3 = -\sin(x) + \frac{3}{2} \cdot \cos(3x)$
8. 44	$f(x) = \frac{a}{\sin(x)} + \frac{b}{\cos(x)}$ $f'(x) = -\frac{a \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{b \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{b \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} - \frac{a \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$
8. 45	$f(x) = \frac{c}{\sin(x)} - b \cdot \tan(x)$ $f'(x) = -\frac{c \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{b}{\cos^2(x)}$
8. 46	$f(x) = \sin(2x) - x \cdot \sin(x)$ $f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 - 1 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x) = 2 \cdot \cos(2x) - \sin(x) - x \cdot \cos(x)$
8. 47	$f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $f'(x) = 0$
8. 48	$f(x) = x \cdot \cos^2(x)$ $f'(x) = 1 \cdot \cos^2(x) + x \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^2(x) - 2 \cdot x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
8. 49	$f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$ $f'(x) = \frac{(-\sin(x)) \cdot (1-\cos(x)) - (1+\cos(x)) \cdot (+\sin(x))}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}} = \frac{-2 \cdot \sin(x)}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$ $= -\sin(x) \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$
8. 50	Druckfehler in der Aufgabe! $f(x) = \arcsin(x)$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8. 51	$x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$ $x^2 + y^2 \to \min$ $f(x) = x^2 + (100 - x)^2 = 2x^2 - 200x + 10000$ $f'(x) = 4x - 200 = 0 \Rightarrow x = 50, y = 100 - 50 = 50$ Da der Graph von f eine nach oben offene Parabel ist, gibt es nur ein Minimum.
8. 52	$x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$ $x \cdot y \to \max$ $f(x) = x \cdot (24 - x) = 24x - x^2$ $f'(x) = 24 - 2x = 0 \Rightarrow x = 12, y = 24 - 12 = 12$ Da der Graph von f eine nach unten offene Parabel ist, gibt es nur ein Maximum.
8. 53	$x + \frac{1}{x} \to \max$ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ Wir haben zwei Lösungen gefunden und müssen diese genauer untersuchen: $f''(x) = 1 + \frac{2}{x^3}$ $f''(1) = 3 > 0$ $f''(-1) = -1 < 0$ $x_1 = 1$ ist ein lokales Minimum (für positive x), $x_2 = -1$ ist ein lokales Maximum (für negative x) und damit die gesuchte Lösung x = -1.
8. 54	$\text{Fläche} = L \cdot B = 25 \Rightarrow B = \frac{25}{L}$ $\text{Umfang} = 2L + 2B \to \min$ $f(L) = 2L + 2 \cdot \frac{25}{L} = 2L + \frac{50}{L}$ $f'(L) = 2 - \frac{50}{L^2} = 0 \Rightarrow L = \pm 5$ Da die Länge nicht negativ sein kann, ist die Lösung L = 5 und damit auch B = 5.
8. 55	$\text{Umfang} = 2L + 2B = 32 \Rightarrow B = \frac{32 - 2L}{2} = 16 - L$ $\text{Fläche} = L \cdot B \to \max$ $f(L) = L \cdot (16 - L) = 16L - L^2$ $f'(L) = 16 - 2L = 0 \Rightarrow L = 8, B = 16 - 8 = 8$ Da der Graph von f eine nach unten offene Parabel ist, gibt es nur ein Maximum.
8. 56	$\text{Umfang} = L + 2B = 40 \Rightarrow L = 40 - 2B$ $\text{Fläche} = L \cdot B \to \max$ $f(B) = (40 - 2B) \cdot B = 40B - 2B^2$ $f'(B) = 40 - 4B = 0 \Rightarrow B = 10, L = 40 - 20 = 20$ Da der Graph von f eine nach unten offene Parabel ist, gibt es nur ein Maximum.

8. 57

Oberfläche = Boden + 4 Seitenwände = $a^2 + 4ah = 100cm^2$

Volumen = Boden·Höhe = $a^2 \cdot h$

Den Ausdruck für die Oberfläche können wir nach a oder h auflösen. Beides führt auf die richtige Lösung. Lösen wir nach a auf, erhalten wir eine Wurzel und die Rechnung wird mühsamer (und fehleranfälliger!). Wir lösen deshalb nach h auf:

$$h = \frac{100 - a^2}{4a} = \frac{25}{a} - \frac{a}{4}$$

$$f(a) = a^2 \cdot \left(\frac{25}{a} - \frac{a}{4}\right) = 25a - \frac{a^3}{4} \to \max$$

$$f'(a) = 25 - \frac{3a^2}{4} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{100}{3}} = 5.773502692, h = 2.886751346 = \frac{a}{2}$$

Zwei Bemerkungen:

1. Es ist wichtig, die erhaltenen Ausdrücke (hier h und f(a)) möglichst weit zu vereinfachen, um die Berechnung nicht unnötig zu komplizieren.
2. Bei solchen Aufgaben stehen die Lösungen (hier a und h) häufig in einem einfachen Verhältnis zueinander. Diese Aufgabe hätte man auch ohne Differentialrechnung lösen können: Bei einem geschlossenen Quader mit quadratischem Grundriss hat ein <u>regulärer Würfel</u> maximales Volumen. Ist der Quader oben offen, ist es eben ein <u>halber Würfel</u> (gleiches Verhältnis zwischen Oberfläche und Volumen). Die Oberfläche beträgt $a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a^2 = 3a^2 = 100cm^2$, und damit resultiert die gleiche Lösung wie oben.

8. 58

Siehe für eine Zeichnung Abschnitt 4.5, Behältervolumen.

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig, zu sehen, dass a eine <u>vorgegebene</u> feste Grösse ist, während h die <u>gesuchte</u> variable Grösse ist.

$$V(h) = (a - 2h)^2 \cdot h = a^2h - 4ah^2 + 4h^3 \to \max$$

$$V'(h) = a^2 - 8ah + 12h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{+8a \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot a^2}}{2 \cdot 12} = \frac{8a \pm 4a}{24} = \begin{cases} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{6}a \end{cases}$$

Die erste Lösung führt auf Volumen 0, weil von dem Blech gar nichts mehr übrigbleibt, die zweite Lösung ist die gesuchte Lösung des Problems.

Wir können das auch anhand der 2. Ableitung zeigen:

$$V''(h) = -8a + 24h$$

$$V''\left(\tfrac{1}{2}a\right) = -8a + 12a = 4a > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$V''\left(\tfrac{1}{6}a\right) = -8a + 4a = -4a < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

8. 59

Das ist das Beispiel aus Abschnitt 4.5, Behältervolumen.

$$V(h) = (100 - 2h) \cdot (60 - 2h) \cdot h = 6000h - 320h^2 + 4h^3 \to \max$$

$$V'(h) = 6000 - 640h + 12h^2 = 0 \Rightarrow h = \begin{cases} 12.13700352 \\ 41.19632981 \end{cases}$$

h muss kleiner sein als 100/2 = 50 und als 60/2 = 30, da das Volumen sonst negativ wird - es kommt also nur die erste Lösung in Frage:

Länge	75.726cm
Breite	35.726cm
Höhe	12.137cm
Volumen	$32835cm^3$

8. 60	$V(h)=\left(\frac{a}{2}-h\right)\cdot(b-2h)\cdot h=\frac{ab}{2}\cdot h-(a+b)\cdot h^2+2h^3\to\max$ $V'(h)=\frac{ab}{2}-2(a+b)\cdot h+6h^2=0\Rightarrow h=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ $V''(h)=-2(a+b)+12h=\pm2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2}$ Die Wurzel ist immer > 0. Für das Maximum muss das negative Vorzeichen gewählt werden.
8. 61	$V=\frac{d^2}{4}\cdot\pi\cdot h$ $F=\frac{d^2}{4}\cdot\pi+d\cdot\pi\cdot h+\frac{d^2}{4}\cdot\pi=\pi\cdot\left(\frac{d^2}{2}+dh\right)\to\min$ Wir können V nach d oder h auflösen und in F einsetzen. Wir wählen h, um nicht mit Wurzeln rechnen zu müssen. $h=\frac{4V}{\pi\cdot d^2}$ $F(d)=\pi\cdot\left(\frac{d^2}{2}+d\cdot\frac{4V}{\pi\cdot d^2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot d^2+\frac{4V}{d}$ $F'(d)=\pi\cdot d-\frac{4V}{d^2}=0\Rightarrow d=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ $h=\frac{4V}{\pi\cdot d^2}=\frac{4V}{\pi\cdot\left(\frac{4V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{\frac{4V}{\pi}}{\left(\frac{4V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=d$ Auch hier trifft die Überlegung von Lösung 8.57 zu.
8. 62	$V=\frac{d^2}{4}\cdot\pi\cdot h$ $F=\frac{d^2}{4}\cdot\pi+d\cdot\pi\cdot h=\pi\cdot\left(\frac{d^2}{4}+dh\right)\to\min$ Wir können V nach d oder h auflösen und in F einsetzen. Wir wählen h, um nicht mit Wurzeln rechnen zu müssen. $h=\frac{4V}{\pi\cdot d^2}$ $F(d)=\pi\cdot\left(\frac{d^2}{4}+d\cdot\frac{4V}{\pi\cdot d^2}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot d^2+\frac{4V}{d}$ $F'(d)=\frac{\pi}{2}\cdot d-\frac{4V}{d^2}=0\Rightarrow d=\sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}}=2\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ $h=\frac{4V}{\pi\cdot d^2}=\frac{4V}{\pi\cdot2^2\cdot\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{\frac{V}{\pi}}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}=\frac{d}{2}$ Auch hier trifft die Überlegung von Lösung 8.57 zu.

8. 63

$$V = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow h = \frac{2V}{\pi \cdot r^2}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2r \cdot h + \pi \cdot r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi = \pi \cdot r^2 + (2+\pi) \cdot r \cdot h \to \min$$

$$F(r) = \pi \cdot r^2 + (2+\pi) \cdot r \cdot \frac{2V}{\pi \cdot r^2} = \pi \cdot r^2 + \frac{(2+\pi) \cdot 2V}{\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

$$F'(r) = 2\pi \cdot r - \frac{(2+\pi) \cdot 2V}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\Downarrow V = 500\text{cm}^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(2+\pi) \cdot 2V}{2\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{2+\pi}{\pi} \cdot \frac{V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2+\pi}{\pi^2}} \cdot \sqrt[3]{V} = 6.386397924\,\text{cm}$$

$$h = \frac{2V}{\pi \cdot r^2} = \frac{2 \cdot \frac{V}{\pi}}{r^2} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2+\pi} \cdot r^3}{r^2} = \frac{2\pi}{2+\pi} \cdot r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi}{(2+\pi)^2}} \cdot \sqrt[3]{V} = 7.804375863\,\text{cm}$$

8. 64

$s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ist die Mantellänge des Kegels.

Die abgewickelte Mantelfläche ist ein Kreissektor mit dem Radius s und der Bogenlänge $2 \cdot \pi \cdot r$. Ihre Fläche beträgt $s^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot s} = s \cdot r \cdot \pi$.

Die Oberfläche A setzt sich zusammen aus Grundfläche + Mantelfläche,

$$\begin{aligned} A &= r^2 \cdot \pi + s \cdot r \cdot \pi \\ &= r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 + h^2} \end{aligned}$$

A hängt von 2 Grössen ab, r und h. Wir brauchen eine weitere Bedingung, damit wir nur eine Variable haben. Mit dem gegebenen Volumen können wir h durch r ausdrücken, $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow h = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2}$.

$$\begin{aligned} A(r) &= r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2}\right)^2} \\ &= r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 + \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^4}} \\ &= \pi \cdot \left(r^2 + \sqrt{r^4 + \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^2}}\right) \end{aligned}$$

Ableitung nach r (mit Potenz- und Kettenregel):

$$A' = \pi \cdot \left(2 \cdot r + \frac{4 \cdot r^3 - \frac{18 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^3}}{2 \cdot \sqrt{r^4 + \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^2}}}\right) = 0$$

Wenn der Ausdruck = 0 ist, muss die grosse Klammer = 0 sein. Im rechten Bruch kürzen wir noch einen Faktor 2 heraus. Damit ergibt sich für r eine Wurzelgleichung,

$$2 \cdot r = -\frac{2 \cdot r^3 - \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^3}}{\sqrt{r^4 + \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^2}}}$$

Wurzelgleichungen löst man bekanntlich, indem man die Wurzel auf einer Seite des Gleichheitszeichens isoliert und dann quadriert.

$$\sqrt{r^4 + \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^2}} = \frac{4.5 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^4} - r^2$$

$$r^4 + \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^2} = \left(\frac{4.5 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^4}\right)^2 - \frac{9 \cdot V^2}{\pi^2 \cdot r^2} + r^4$$

$$18 \cdot \frac{V^2}{\pi^2 \cdot r^2} = 4.5^2 \cdot \left(\frac{V^2}{\pi^2 \cdot r^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^4}$$

$$18 = 4.5^2 \cdot \frac{V^2}{\pi^2 \cdot r^2} \cdot \frac{1}{r^4}$$

$$r^6 = \frac{4.5^2}{18} \cdot \frac{V^2}{\pi^2} = \frac{9}{8} \cdot \frac{V^2}{\pi^2}$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{9 \cdot V^2}{8 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{\sqrt{8} \cdot \pi}} = 0.6963 \cdot \sqrt[3]{V}$$

Den Ausdruck für h erhalten wir durch Einsetzen von r und Anwendung der Rechenregeln für Potenzen zu

$$h = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2} = \sqrt[3]{\frac{24 \cdot V}{\pi}} = 1969 \cdot \sqrt[3]{V}$$

Das Verhältnis der beiden Grössen ist

$$\frac{h}{r} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2.828\ .$$

Der Öffnungswinkel des Kegels beträgt

$$2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{h}\right) = 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{0.125}\right) = 38°56'32.7''\ .$$

Für V = 1000cm³ erhalten wir r = 6.936198827cm und h = 19.69490044cm.

8. 65 Vorüberlegung:

Das Volumen ändert sich kontinuierlich mit φ. Für $\varphi = 0°$ und $\varphi = 360°$ ist es =0, dazwischen ist es >0. Es muss also irgendwo ein Maximum geben.

Bei dieser Aufgabe soll mit Winkeln im Bogenmass (rad) gerechnet werden.

Die Bogenlänge des Sektors beträgt $r\cdot\varphi$. Sie entspricht dem Umfang U der Grundfläche des Kegels. ρ bezeichnet den Radius dieser Grundfläche.

$$\rho = \frac{U}{2\pi} = \frac{r\cdot\varphi}{2\pi}$$

$$h = \sqrt{r^2 - \rho^2}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\rho^2\cdot\pi\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{r\cdot\varphi}{2\pi}\right)^2\cdot\pi\cdot\sqrt{r^2 - \left(\frac{r\cdot\varphi}{2\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{r^3}{12\pi}\cdot\varphi^2\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\varphi^2}$$

Zur Ermittlung des Maximums lassen wir den konstanten Vorfaktor $\frac{r^3}{12\pi}$ weg.

$$V' = 2\cdot\varphi\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\varphi^2} + \frac{\varphi^2\cdot\left(-\frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\varphi\right)}{2\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\varphi^2}} = 0$$

$$2\cdot\varphi\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\varphi^2} = \frac{\varphi^2\cdot\frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\varphi}{2\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\varphi^2}}$$

$$4\cdot\varphi\cdot\left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\varphi^2\right) = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\varphi^3$$

$$4 - \frac{1}{\pi^2}\cdot\varphi^2 = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\varphi^2$$

$$4 = \frac{3}{2\pi^2}\cdot\varphi^2$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\pi \cong 293°56'19.6''$$

$$V = \frac{1}{12\pi}\cdot\frac{8}{3}\pi^2\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{8}{3}\pi^2}\cdot r^3 = \frac{2\pi}{9\cdot\sqrt{3}}\cdot r^3 = 0.4031\cdot r^3$$

Für r = 15cm erhalten wir V = 1360.35cm³.

Der Öffnungswinkel beträgt

$$2\cdot\arcsin\left(\frac{\rho}{r}\right) = 2\cdot\arcsin\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) = 2\cdot\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cong 109°28'16.4''$$

8. 66

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{160}\Rightarrow R_2=\frac{1}{\frac{1}{160}-\frac{1}{R_1}}=\frac{160\cdot R_1}{R_1-160}$$

$$R_1+R_2\to \min$$

$$f(R_1)=R_1+\frac{160\cdot R_1}{R_1-160}$$

$$f'(R_1)=1+\frac{160\cdot(R_1-160)-160\cdot R_1\cdot 1}{(R_1-160)^2}=\frac{(R_1-160)^2+160\cdot(R_1-160)-160\cdot R_1\cdot 1}{(R_1-160)^2}=0$$

Ein Bruch ist =0, wenn sein Zähler =0 ist. Wir dürfen den Nenner deshalb weglassen, wenn er bei der gefundenen Lösung ≠ 0 ist:

$$(R_1-160)^2+160\cdot(R_1-160)-160\cdot R_1=0$$

$$(R_1-160)^2=160^2$$

$$R_1=320$$

$$R_2=320$$

8. 67

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{x-b}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{x^2-2xb+b^2}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3b^2+2bx-x^2}$$

$$F=\frac{b+x}{2}\cdot h=\frac{b+x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3b^2+2bx-x^2}=\frac{1}{4}\cdot(b+x)\cdot\sqrt{3b^2+2bx-x^2}\to \max$$

$$F'=\frac{1}{4}\cdot\left(1\cdot\sqrt{3b^2+2bx-x^2}+(b+x)\cdot\frac{2b-2x}{2\cdot\sqrt{3b^2+2bx-x^2}}\right)=0$$

$$\sqrt{3b^2+2bx-x^2}=\frac{(b+x)\cdot(x-b)}{\sqrt{3b^2+2bx-x^2}}$$

$$3b^2+2bx-x^2=x^2-b^2$$

$$4b^2+2bx-2x^2=0$$

$$2b^2+bx-x^2=0$$

$$x=\frac{+b\pm\sqrt{b^2+8b^2}}{2}=\frac{b\pm 3b}{2}=\begin{cases}2b\\-b\end{cases}$$

Da die negative Lösung sinnlos ist, ist x = 2b die gesuchte Lösung. Damit ist der Winkel $\varphi=90°+\arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}b}{b}\right)=120°$. Der maximale Querschnitt ist ein halbes reguläres Sechseck.

8. 68

Wir suchen das Maximum von $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$. Dabei können wir den Divisor 6 weglassen.
Mit Pythagoras gilt $h^2 + b^2 = (2r)^2$, also $h^2 = 4r^2 - b^2$:

$$f(b) = b \cdot h^2 = b \cdot \left(4r^2 - b^2\right) = 4r^2 \cdot b - b^3 \to \max$$

$$f'(b) = 4r^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot r, h = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot r$$

Die Querschnittfläche des Balkens beträgt $b \cdot h = \sqrt{\frac{32}{9}} \cdot r^2 = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot r^2 = 1.889 r^2$

$$\text{Abfall} = \frac{\pi \cdot r^2 - \frac{\sqrt{32}}{3} \cdot r^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{\pi - \frac{\sqrt{32}}{3}}{\pi} = 1 - \frac{\sqrt{32}}{3 \cdot \pi} = 39.98\%$$

Verlust an Biegefestigkeit:

$$\frac{\frac{\pi}{4} \cdot r^3 - \frac{b \cdot h^2}{6}}{\frac{\pi}{4} \cdot r^3} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot r^3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r \cdot \frac{8}{3} \cdot r^2}{\frac{\pi}{4} \cdot r^3} = 1 - \frac{32}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi} = 34.66\%$$

Der Balken hat also 60.0% des Querschnitts (Gewichts) und 65.3% des Widerstandsmomentes des vollen Stammes.

8. 69

$$P(n) = M(n) \cdot \left(2\pi \cdot \frac{n}{60}\right)$$

$$= \frac{\pi}{30} \cdot \left(230 - \frac{(n - 3500)^2}{50000}\right) \cdot n$$

$$= \frac{\pi}{30} \cdot \left(230 - 0.00002 \cdot n^2 + 0.14 \cdot n - 245\right) \cdot n$$

$$= \frac{\pi}{30} \cdot \left(-0.00002 \cdot n^3 + 0.14 \cdot n^2 - 15 \cdot n\right)$$

$$P'(n) = \frac{\pi}{30} \cdot \left(-0.00006 \cdot n^2 + 0.28 \cdot n - 15\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$n = \frac{-0.28 \pm \sqrt{0.0748}}{-0.00012} = \begin{cases} 54.2 \\ 4612.5 \end{cases}$$

Mit n = 4612.5/min erhalten wir P = 99138.3 W = 134.8 PS.

<table>
<tr><td>8. 70</td><td>

$$P(u) = w \cdot (v - u) \cdot u$$
$$= w \cdot \left(v \cdot u - u^2\right)$$
$$P'(u) = w \cdot (v - 2 \cdot u) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$u = \frac{v}{2}$$
$$P''(u) = -2 \cdot w \cdot u < 0$$

Für eine maximale Energieübertragung muss die Geschwindigkeit der Turbinenschaufeln gleich der halben Strahlgeschwindigkeit sein.
</td></tr>
<tr><td>8. 71</td><td>

Gegeben:

v	Spannung einer Zelle
r	innerer Widerstand einer Zelle
R_a	äusserer Widerstand der Leitung

Damit wird

$V = n_s \cdot v$	Spannung der Schaltung
$R_i = \frac{n_s \cdot r}{n_p} = \frac{n_s^2 \cdot r}{N}$	totaler innerer Widerstand

Nach dem Ohm'schen Gesetz ist nun

$$I(n_s) = \frac{U}{R} = \frac{n_s \cdot v}{R_a + \frac{r}{N} \cdot n_s^2} \rightarrow \max$$

Diese Funktion können wir mit der Quotientenregel ableiten und n_s bestimmen. In diesem Fall wird aber die Rechnung stark vereinfacht, wenn wir anstelle des Maximums von I das <u>Minimum von 1/I</u> ermitteln,

$$\frac{1}{I} = \frac{R_a + \frac{r}{N} \cdot n_s^2}{n_s \cdot v} = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{R_a}{n_s} + \frac{r}{N} \cdot n_s\right) \rightarrow \min$$
$$\Downarrow$$
$$n_s = \sqrt{\frac{R_a}{r} \cdot N}$$

Daraus folgt durch Einsetzen $R_i = R_a$. Für den Strom erhalten wir

$$I_{max} = \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{r \cdot R_a}}$$

In einem praktischen Beispiel muss die Lösung gegebenenfalls so angepasst werden, dass n_p und n_s beide ganzzahlig werden.

Mit $N = 48$, $v = 1.8$ V, $R_a = 0.8\ \Omega$ und $r = 0.15\ \Omega$ erhalten wir $n_s = 16$, $n_p = 3$, $V = 28.8$ V und $I_{max} = 18$ A.
</td></tr>
</table>

8. 72

Umfang: $U = 2\cdot\pi\cdot r + 4\cdot a \Rightarrow a = \frac{U - 2\cdot\pi\cdot r}{4}$

Fläche: $F = \pi\cdot r^2 + a^2 = \pi\cdot r^2 + \frac{1}{16}\cdot\left(U^2 - 4\cdot\pi\cdot U\cdot r + 4\cdot\pi^2\cdot r^2\right)$

$$= \left(\pi + \frac{\pi^2}{4}\right)\cdot r^2 - \frac{\pi}{4}\cdot U\cdot r + \frac{U^2}{16}$$

Ableitung: $F' = 2\cdot\left(\pi + \frac{\pi^2}{4}\right)\cdot r - \frac{\pi}{4}\cdot U = 0$

$$\Downarrow$$

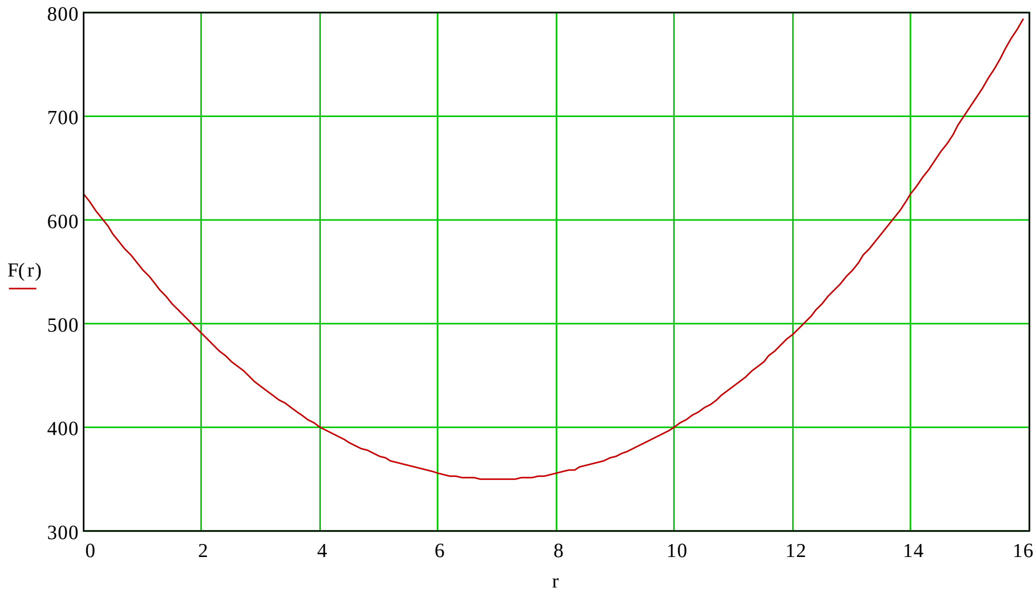
$$r = \frac{\frac{\pi}{4}\cdot U}{2\cdot\left(\pi + \frac{\pi^2}{4}\right)} = \frac{\frac{\pi}{4}\cdot U}{\frac{\pi}{2}\cdot(4+\pi)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{U}{4+\pi} = 7.001$$

$$a = \frac{U - 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{U}{4+\pi}}{4} = \frac{U\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4+\pi}\right)}{4} = \frac{U\cdot\frac{4}{4+\pi}}{4} = \frac{U}{4+\pi} = 14.002$$

$$= 2\cdot r$$

$$F'' = 2\cdot\pi + \frac{\pi^2}{2} > 0$$

Es handelt sich also um ein Minimum. Wo aber gibt es ein Maximum?



Wir haben es hier mit einem derjenigen Fälle zu tun, wo ein gesuchtes Extremum am Rand des möglichen Wertebereiches liegt, hier bei $r = \frac{U}{2\cdot\pi} = 15.915$, wo der Kreis maximale Grösse hat und das Quadrat verschwindet. Solche Extrema ohne horizontalen Kurvenverlauf werden mit der Differentialrechnung natürlich nicht gefunden!

Es ist bekannt, dass der Kreis bei gegebenem Umfang die Figur mit maximaler Fläche ist.

8. 73 Nachfragefunktion

Es sind zwei Punkte einer linearen Funktion gegeben, also machen wir den Ansatz

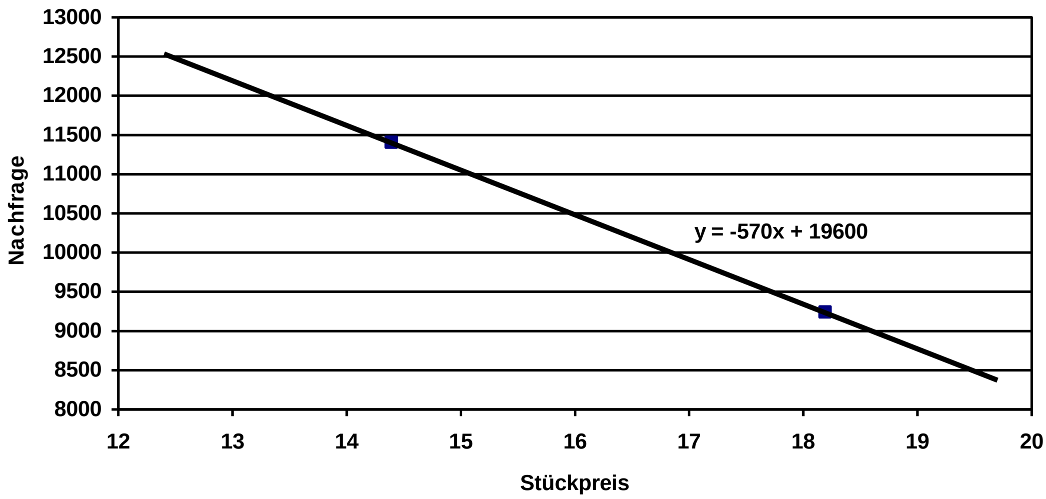
Nachfrage = m · Stückpreis + b

und berechnen m und b,

$$m = \frac{11392 - 9226}{14.40 - 18.20} = -570$$

$$b = 9226 - (-570) \cdot 18.20 = 19600$$

Wir erhalten N(x) = 19600 – 570 · x, wo x für den Stückpreis steht.



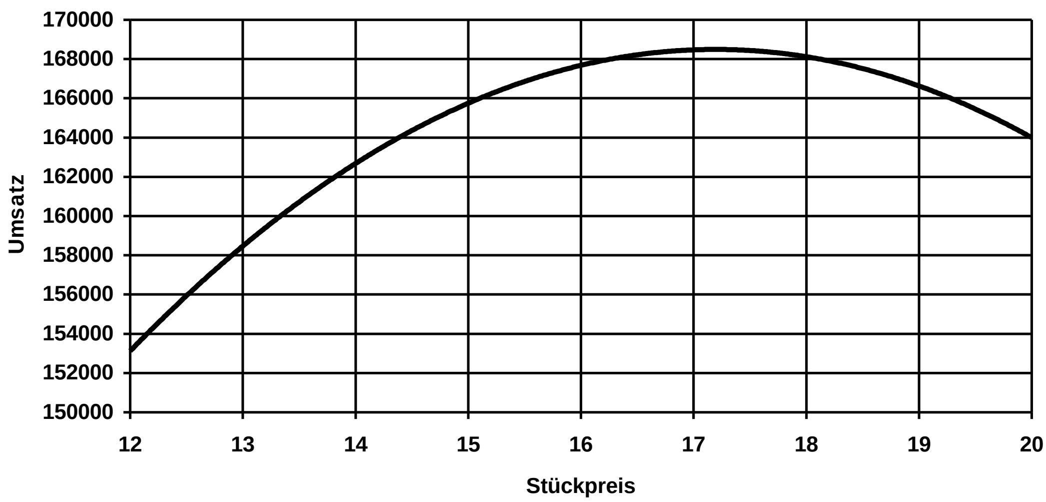
Umsatzfunktion (bei garantiertem Absatz)

Umsatz = Nachfrage · Stückpreis

U(x) = (19600 – 570 · x) · x

= 19600 · x – 570 · x²

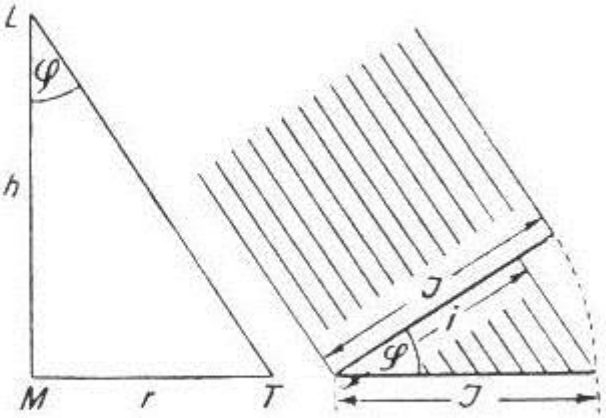
Der Umsatz wird hier also zu einer quadratischen Funktion des Stückpreises.



Umsatzmaximum

Das Maximum einer quadratischen Funktion ax² + bx + c liegt in der Mitte zwischen ihren Nullstellen, also (unter Weglassung des ±-Terms) bei $\frac{-b}{2a} = \frac{-19600}{2 \cdot (-570)} = 17.19$

8. 74



Die Beleuchtungsstärke des Buches ist proportional zu cos(φ) (rechter Teil der Figur). x bezeichnet die schräge Entfernung zwischen Lampe und Buch. Nun gilt:

$$\frac{r}{x} = \sin(\varphi)$$

$$B = L \cdot \frac{\cos(\varphi)}{x^2} = L \cdot \frac{\cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)}{r^2} = \frac{L}{r^2} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$$

$$B'(\varphi) = \frac{L}{r^2} \cdot \left(-\sin(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)\right)$$

$$= \frac{L}{r^2} \cdot \sin(\varphi) \cdot \left(-\sin^2(\varphi) + 2 \cdot \cos^2(\varphi)\right) = 0$$

Damit dieser Ausdruck = 0 wird, muss die Klammer = 0 sein, denn φ kann nicht = 0 sein. Daraus folgt

$\tan^2(\varphi) = 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 54°44'8.2''$

Der Winkel hängt also gar nicht von r ab, er ist immer gleich! Für die Höhe h erhalten wir damit

$$\tan(\varphi) = \frac{r}{h} = \sqrt{2}$$

$$h(r) = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot r$$

8. 75 Die Beleuchtungsstärke an einem bestimmten Punkt ist die Summe der Stärken der einzelnen Lichtquellen an diesem Punkt.

$$B(x) = \frac{L_1}{x^2} + \frac{L_2}{(10-x)^2}$$

$$B'(x) = \frac{-2 \cdot L_1}{x^3} + \frac{-2 \cdot L_2 \cdot (-1)}{(10-x)^3} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot L_2 \cdot x^3 = 2 \cdot L_1 \cdot (10-x)^3$$

$$\sqrt[3]{L_2} \cdot x = \sqrt[3]{L_1} \cdot (10-x)$$

$$\left(\sqrt[3]{L_1} + \sqrt[3]{L_2}\right) \cdot x = 10 \cdot \sqrt[3]{L_1}$$

$$x = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{L_1}}{\sqrt[3]{L_1} + \sqrt[3]{L_2}} = \frac{30}{7} = 4.286$$

Die Lösung wird einiges komplizierter, wenn man den Faktor $(10 - x)^3$ ausmultipliziert und zur Belohnung für die Mühe eine kubische Gleichung lösen darf!

Es war zu erwarten, dass das Ergebnis etwas näher bei der schwächeren Lampe liegen würde: wenn wir in der Mitte sind, sind die Anteile der beiden Lampen proportional zu ihren Leuchtstärken. Bei einer kleinen Verschiebung in Richtung der schwächeren Lampe nimmt die Beleuchtungsstärke von dieser her weniger zu als sie wegen der grösseren Entfernung von der stärkeren Lampe abnimmt. Das ist bei diesem Resultat der Fall.

8. 76 Es gilt:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \Rightarrow \text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{v_1} + \left|\frac{e-x}{v_2}\right| = \frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_1} + \left|\frac{e-x}{v_2}\right|$$

Wir schränken die Betrachtung vorerst auf den Bereich $x \le e$ ein, so dass der Absolutbetrag entfällt. Aus der ersten Ableitung folgt für das Minimum

$$t' = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{b^2+x^2}} - \frac{1}{v_2} = 0$$

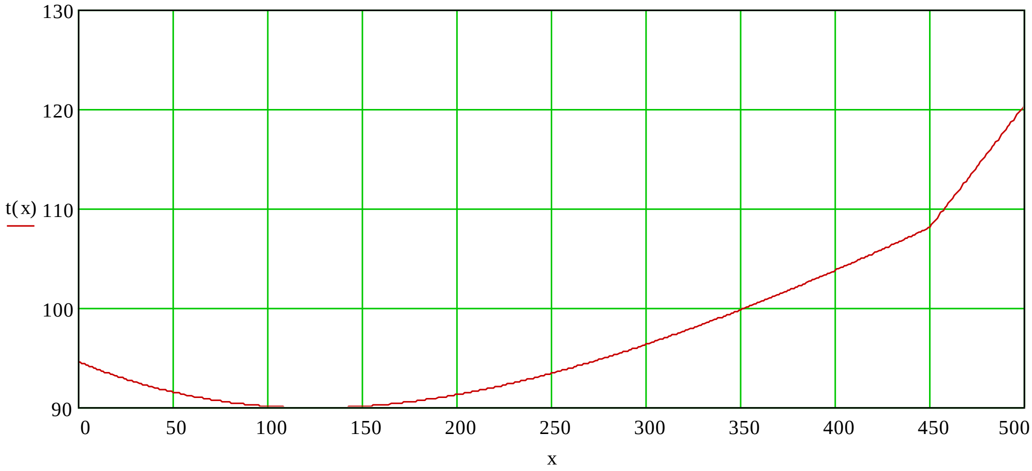
$$\Downarrow$$

$$\frac{v_2}{v_1} \cdot x = \sqrt{b^2+x^2}$$

$$x = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}} = \tan(\varphi)$$

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten bestimmt also den Abgangswinkel. Die Grösse e kommt in der Lösung gar nicht explizit vor!

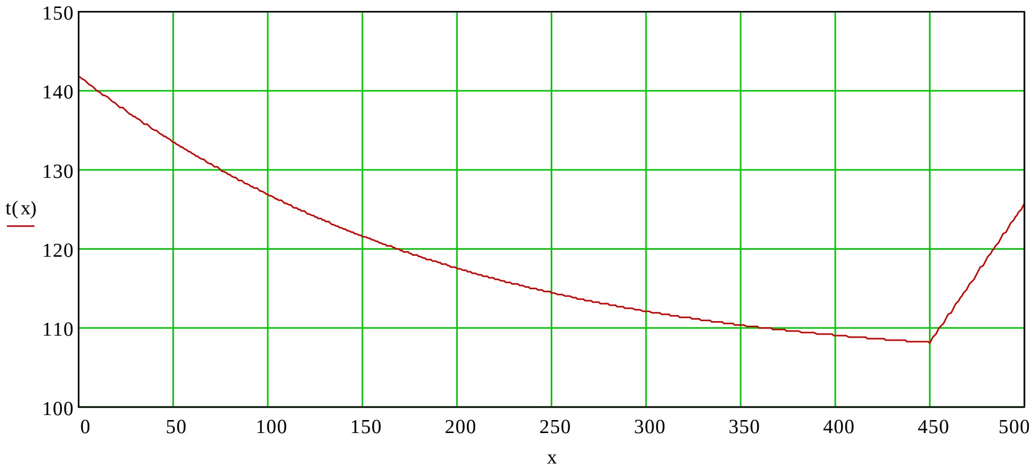
Minimum: $x_{min} := \dfrac{b}{\sqrt{\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}}$ $\qquad x_{min} = 125$ $\qquad$ Grenzverhältnis: $f := \sqrt{1 + \dfrac{b}{e}}$ $\qquad f = 1.291$



Aber: wir haben die Voraussetzung gemacht, dass $x \le e$ sein muss. Der Grenzfall $x_{min} = e$ resultiert, wenn $\dfrac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \dfrac{b}{e}}$. Falls das Verhältnis der Geschwindigkeiten kleiner ist als dieser Wert, liegt der oben gefundene Wert für x, das Minimum der Funktion "ohne Betrag", bei $x > e$ und ist nicht die Lösung der Aufgabe.
Die Funktion hat nur dann im Bereich $0 < x < e$ ein Minimum mit horizontalem Kurvenverlauf, wenn $v_2 \ge f \cdot v_1$ ist, sonst liegt das Minimum bei $x = e$, wo die Funktion einen Knick hat. Dieser Punkt wird mit der Differentialrechnung natürlich nicht gefunden!

Beispiel: $v_1 = 5$, $v_2 = 5.5$

Minimum: $x_{min} := \dfrac{b}{\sqrt{\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1}}$ $\qquad x_{min} = 654.654$



8. 77	Wir berechnen als Funktion des Winkels α die Länge S, wenn die Leiter das Haus in den Punkten Z, C und A berührt. Wenn sich α bei gegebenen b und h verändert, durchläuft S irgendwo ein Minimum. Dieses Minimum entspricht der maximalen Länge, die S haben darf, um "die Kurve zu kriegen". $$\left.\begin{array}{r}\frac{b}{p}=\cos(\alpha)\\ \frac{h}{S-p}=\sin(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow S=\frac{b}{\cos(\alpha)}+\frac{h}{\sin(\alpha)}$$ $$\Downarrow$$ $$S'=\frac{-b\cdot(-\sin(\alpha))}{\cos^2(\alpha)}+\frac{-h\cdot\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}=0$$ $$\Downarrow$$ $$\tan^3(\alpha)=\frac{h}{b}$$ Mit b = 5 m und h = 3 m ergibt sich damit α = 40° 8' 43.3" und damit S = 11.194 m.
8. 78	Entsprechend Aufgabe 8.77: $$h=\left(S-\frac{b}{\cos(\alpha)}\right)\cdot\sin(\alpha)=S\cdot\sin(\alpha)-b\cdot\tan(\alpha)$$ $$h'=S\cdot\cos(\alpha)-\frac{b}{\cos^2(\alpha)}=0$$ $$\Downarrow$$ $$\cos^3(\alpha)=\frac{b}{S}$$ Daraus ergeben sich α = 37° 28' 2.3" und damit h = 2.25 m.

8. 79 Es ist

$$a = m \cdot \sin(\varphi) + v \cdot \cos(\varphi)$$

und

$$b = n \cdot \cos(\varphi) + v \cdot \sin(\varphi)$$

und damit

$$u = m + n = \frac{a - v \cdot \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \frac{b - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

Ableitung nach φ:

$$u' = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{a}{\sin(\varphi)} - \frac{v}{\tan(\varphi)} + \frac{b}{\cos(\varphi)} - v \cdot \tan(\varphi)\right)$$
$$= \frac{-a}{\sin^2(\varphi)} \cdot \cos(\varphi) - \frac{-v}{\tan^2(\varphi)} \cdot \frac{1}{\cos^2(\varphi)} + \frac{-b}{\cos^2(\varphi)} \cdot (-\sin(\varphi) - \frac{v}{\cos^2(\varphi)}$$
$$= \frac{v - a \cdot \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} - \frac{v - b \cdot \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

Zur numerischen Lösung siehe Beispiel 8.34.
Die Lösung kann auch gefunden werden, indem die Gleichung mit Hilfe der Identität $\cos^2(\varphi) = 1 - \sin^2(\varphi)$ und Quadrieren in ein Polynom 6. Grades in $\sin(\varphi)$ umgewandelt wird:

$$-(a^2 + b^2) \cdot \sin^6(\varphi) + 4bv \cdot \sin^5(\varphi) + (3a^2 - 4v^2) \cdot \sin^4(\varphi) - 2bv \cdot \sin^3(\varphi)$$
$$-(3a^2 - 4v^2) \cdot \sin^2(\varphi) + (a^2 - v^2) = 0$$

Auflösung nach anderen Grössen:

$$v = -u \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \sin(\varphi)$$
$$v' = u \cdot (1 - 2\cos^2(\varphi)) - a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi)$$
$$a = u \cdot \sin(\varphi) + \frac{v}{\cos(\varphi)} - b \cdot \tan(\varphi)$$
$$a' = u \cdot \cos(\varphi) - \frac{b - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$
$$b = u \cdot \cos(\varphi) + \frac{v}{\sin(\varphi)} - \frac{a}{\tan(\varphi)}$$
$$b' = -u \cdot \sin(\varphi) + \frac{a - v \cdot \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$$