

Anwendungsorientierte Mathematik für Techniker

Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 7

7. 1	$a_n = 2n + 1$
7. 2	$a_n = 3 \cdot (n - 1) = 3n - 3$
7. 3	$a_n = (-1)^n \cdot 2$
7. 4	$a_n = 8 - 3n$
7. 5	$a_n = \frac{n^2}{2}$
7. 6	$a_n = \frac{6}{2^n}$
7. 7	$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n + 2}$
7. 8	<p>a) $n = 16, a_{16} = 50$ b) $a_{30} = 91, s_{30} = 1425$ c) $d = -5, s_{20} = -750$ d) $a_1 = 8, d = 7$ e) $a_1 = 168, s_{57} = 17556$ f) $n = 100, a_{100} = 191$</p>
7. 9	<p>$2 + 4 + 6 + \dots + 40 + 42$ $a_n = 2n, a_1 = 2, d = 2, n = 21$ $s_{21} = \frac{21}{2} \cdot (2 + 42) = 462$</p> <p>Nachprüfung mit dem Rechner möglich: <u>math 5: sum(</u></p> $s_{21} = \sum_{x=1}^{21} 2x = 462$
7. 10	$\begin{cases} s_3 + s_{11} = 34 \\ s_7 + s_{12} = 44 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14a_1 + 58d = 34 \\ 19a_1 + 87d = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{7}{2} \\ d = -\frac{15}{58} \end{cases}$ <p>$s_{25} = 9.913793103$</p>
7. 11	<p>$a_1 = 1$ $d = 2$</p> $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2) = n^2 = 1600 \Rightarrow n = 40$

7. 12 Beim Biegen wird die Aussenseite eines Objektes verlängert und die Innenseite verkürzt. Die neutrale Faser (hier in der Mitte) behält ihre Länge.

Der Durchmesser der neutralen Faser der innersten Lage beträgt deshalb 500.1mm, der der äussersten Lage 999.9mm. Wir erhalten für die Länge

$$\begin{aligned} L &= 500.1 \cdot \pi + 500.3 \cdot \pi + \dots + 999.9 \cdot \pi \\ &= \pi \cdot (500.1 + 500.3 + \dots + 999.9) \end{aligned}$$

$$\text{Anzahl Lagen: } n = \frac{250\text{mm}}{0.1\text{mm}} = 2500$$

$$L = \pi \cdot \frac{2500}{2} \cdot (500.1 + 999.9) = 5890486.225\text{mm} \approx 5.9\text{km}$$

Alternative Lösung: Wir betrachten das Papier von der Seite. Beim Aufwickeln wandeln wir ein Rechteck der Abmessungen $L \cdot 0.1\text{mm}$ in einen Kreisring mit Innendurchmesser 500mm und Aussendurchmesser 1000mm um, also

$$L \cdot 0.1\text{mm} = \frac{(1000\text{mm})^2}{4} \cdot \pi - \frac{(500\text{mm})^2}{4} \cdot \pi$$

$$L = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1000^2 - 500^2}{0.1} = 5890486.225\text{mm}$$

7. 13 $a_1 = 48000$

$$d = 12 \cdot 100 = 1200$$

$$a_{25} = 48000 + 24 \cdot 1200 = 76800$$

$$s_{25} = \frac{25}{2} \cdot (48000 + 76800) = 1560000$$

7. 14 $n = 12$

$$d = -30$$

$$s_{12} = 6000$$

$$= \frac{12}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + 11 \cdot (-30))$$

$$a_1 = 665$$

$$a_{12} = 335$$

7. 15 a) $a_1 = 3$, $s_{10} = 3069$

b) $q = 2$, $s_9 = 6643$

c) $a_1 = 1.666610215$, $a_{10} = 32803.88887$

d) Diese Aufgabe ist etwas knifflig:

$$25 \cdot \frac{1 - (-4)^n}{1 - (-4)} = 81925$$

$$1 - (-4)^n = 16385$$

$$(-4)^n = -16384$$

Logarithmen existieren nur für positive Numeri (Argumente). Der Ausdruck $(-4)^n$ existiert aber für ganzzahlige n und liefert für ungerade n negative Ergebnisse. Für ungerades n ist $(-4)^n = -(4^n)$, für gerades n ist $(-4)^n = +(4^n)$. Falls wir für die Gleichung $4^n = 16384$ eine ungerade Lösung erhalten, ist diese Lösung unseres Problems – und sonst gibt es keine! Wir haben Glück und erhalten $n = 7$. Hingegen kann $(-4)^n$ für gerades n nie negativ werden, die Gleichung $(-4)^n = -8192$ beispielsweise hat keine Lösung!

$$a_n = 102400$$

e) $a_{12} = -40743810$, $s_{10} = -30557800$

Anwendungsorientierte Mathematik für Techniker
Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 7

$$7.16 \quad 1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 32767$$
$$2^n = 1 + 32767$$
$$n = 15$$

$$7.17 \quad a_1 = 1600000$$
$$a_5 = 2300000$$
$$= a_1 \cdot q^4$$
$$q = 1.094969352$$

Der jährliche Zuwachs beträgt etwa 9.5%.

Umsatz 1. Jahr:	1600000
Umsatz 2. Jahr:	1751950.96
Umsatz 3. Jahr:	1918332.61
Umsatz 4. Jahr:	2100515.41
Umsatz 5. Jahr:	2300000