4. 1

Ansatz $m \cdot x + b = y$

$$\begin{bmatrix} m \cdot (-2) + b = -1 \\ m \cdot 3 + b = 4 \end{bmatrix}$$

$m = 1$, $b = 1$

4. 2

$m = 0.5$

$0.5 \cdot 3 + b = 2 \Rightarrow b = 0.5$

4. 3

$6 = m \cdot 4 + 0.5$

$$m = \frac{6-0.5}{4} = 1375$$

4. 4

Parallel heisst, gleiche Steigung.

$4 = 0.5 \cdot 3 + b_1 \Rightarrow b_1 = 2.5$

Die Steigung der senkrechten Geraden beträgt -2.

$7 = (-2) \cdot 2 + b_2 \Rightarrow b_2 = 11$

4. 5

Die Gerade $y = 2 \cdot x - 6$ hat Steigung $m_1 = 2$.

Für die durch den Punkt (-5|-4) gehende Gerade mit Steigung $m_2 = -1/m_1 = -0.5$ gilt

$-4 = (-0.5) \cdot (-5) + b_2 \Rightarrow b_2 = -6.5$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden liegt bei

$$\begin{pmatrix} y_S = 2 \cdot x_S - 6 \\ y_S = -\frac{1}{2} \cdot x_S - 6.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_S = -0.2 \\ y_S = -6.4 \end{cases}$$

Der Abstand zwischen den beiden Punkten (-5|-4) und (-0.2|-6.4) ist gemäss dem Satz von Pythagoras gegeben durch

$$\sqrt{((-5)-(-0.2))^2 + ((-4)-(-6.4))^2} = 5.367$$

4. 6

g: $y = x$
h: $y = -x + 10$
Schnittpunkt:

$$x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} = \frac{10-0}{1-(-1)} = 5$$

$$y_S = m_1 \cdot x_S + b_1 = 5$$

Die beiden Geraden schneiden sich senkrecht, weil $m_1 \cdot m_2 = -1$.

4. 7 Erstelle eine Skizze!

Die Eckpunkte ergeben sich als Schnittpunkte von jeweils zwei Geraden, also Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{bmatrix} x+6y=-6 \\ 5x-3y=-13.5 \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+6y=-6 \\ 2x+y=4.5 \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x-3y=-13.5 \\ 2x+y=4.5 \end{bmatrix} \Rightarrow C=\begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

Punkt C kann auch direkt herausgelesen werden.

Seitenlängen mit dem Satz von Pythagoras:

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(3-(-3)\right)^2+\left((-1.5)-(-0.5)\right)^2}=6.083$$

$$\overline{BC}=6.708$$

$$\overline{AC}=5.831$$

Winkel:

$$y=-\frac{x}{6}-1 \Rightarrow \alpha_{AB}=\arctan\left(-\frac{1}{6}\right)=-9.462°$$

$$y=\frac{5}{3}x+4.5 \Rightarrow \alpha_{AC}=\arctan\left(\frac{5}{3}\right)=59.036°$$

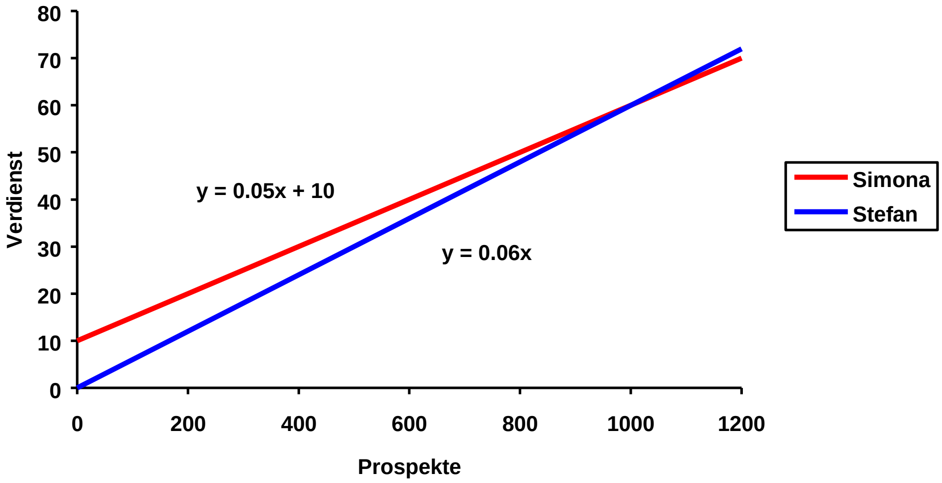
$$\alpha=\alpha_{AC}-\alpha_{AB}=68.499° \cong 68°29'54.8''$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\overline{AC}}=\frac{\sin(\alpha)}{\overline{BC}} \Rightarrow \beta=53.973° \cong 53°58'21.5''$$

$$\frac{\sin(\gamma)}{\overline{AB}}=\frac{\sin(\alpha)}{\overline{BC}} \Rightarrow \gamma=57.529° \cong 57°31'43.7''$$

Fläche = 16.5

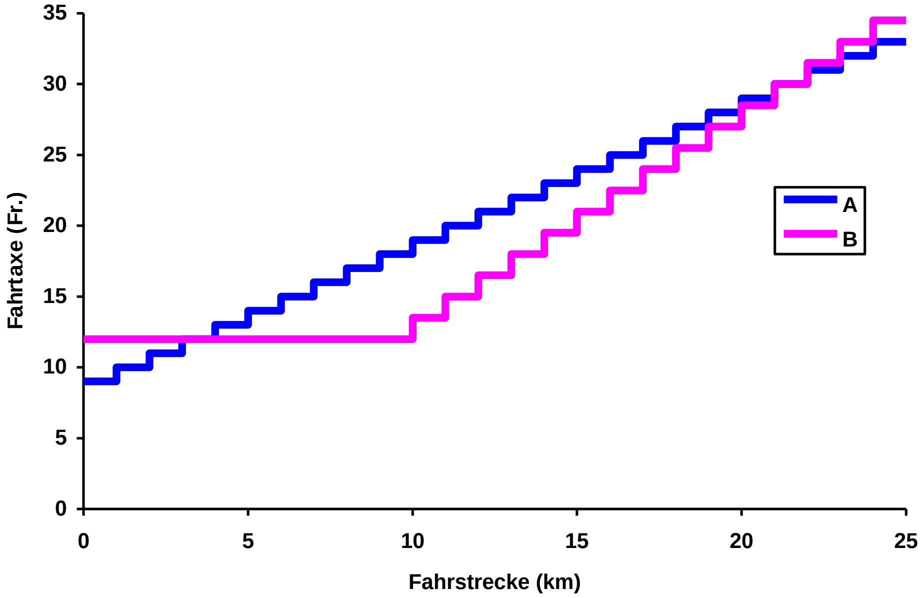
4. 8



c) $0.05x + 10 = 0.06x \Rightarrow x = 1000$

d) $0.05x + 10 = 98 \Rightarrow x = 1760$

4. 9 a) Wenn man es genau nimmt, sieht das Diagramm so aus:



Das wäre aber zu aufwendig und würde kein Rechnen mit linearen Funktionen benötigen.

b) Deshalb (x muss immer auf die nächsthöhere ganze Zahl aufgerundet werden):

$A = 8 + x$	für alle x
$B = 12$	für $0 \text{ km} < x \leq 10 \text{ km}$
$B = 12 + 1.5\cdot(x - 10) = 1.5x - 3$	für $x > 10$ km

c) Schnittpunkte der Linien:

Kurzstrecke:	$8 + x = 12$	$\Rightarrow x = 4$
Langstrecke:	$8 + x = 1.5x - 3$	$\Rightarrow x = 22$

Also:

Für Strecken $0 \text{ km} < x \leq 3$ km ist A günstiger,

für Strecken $3 \text{ km} < x \leq 4$ km ist der Preis gleich,

für Strecken $4 \text{ km} < x \leq 21$ km ist B günstiger,

für Strecken $21 \text{ km} < x \leq 22$ km ist der Preis gleich,

für Strecken $x > 22$ km ist wieder A günstiger.

4. 10 Wasserversorgung:

a) $K_A(x) = 60 + 1.2x$

$K_B(x) = 40 + 1.4x$

b) $60 + 1.2x = 40 + 1.4x$

$x = 100$

c) y sei der m^3-Preis in C. Dann beträgt die Grundgebühr 40y und die Kostenfunktion ist $K_C(x) = 40y + x\cdot y$.

$x = 200$ gemäss Aufgabe, also ist zu lösen

$40y + 200y = 60 + 1.2\cdot 200$

$240y = 300$

$y = 1.25$

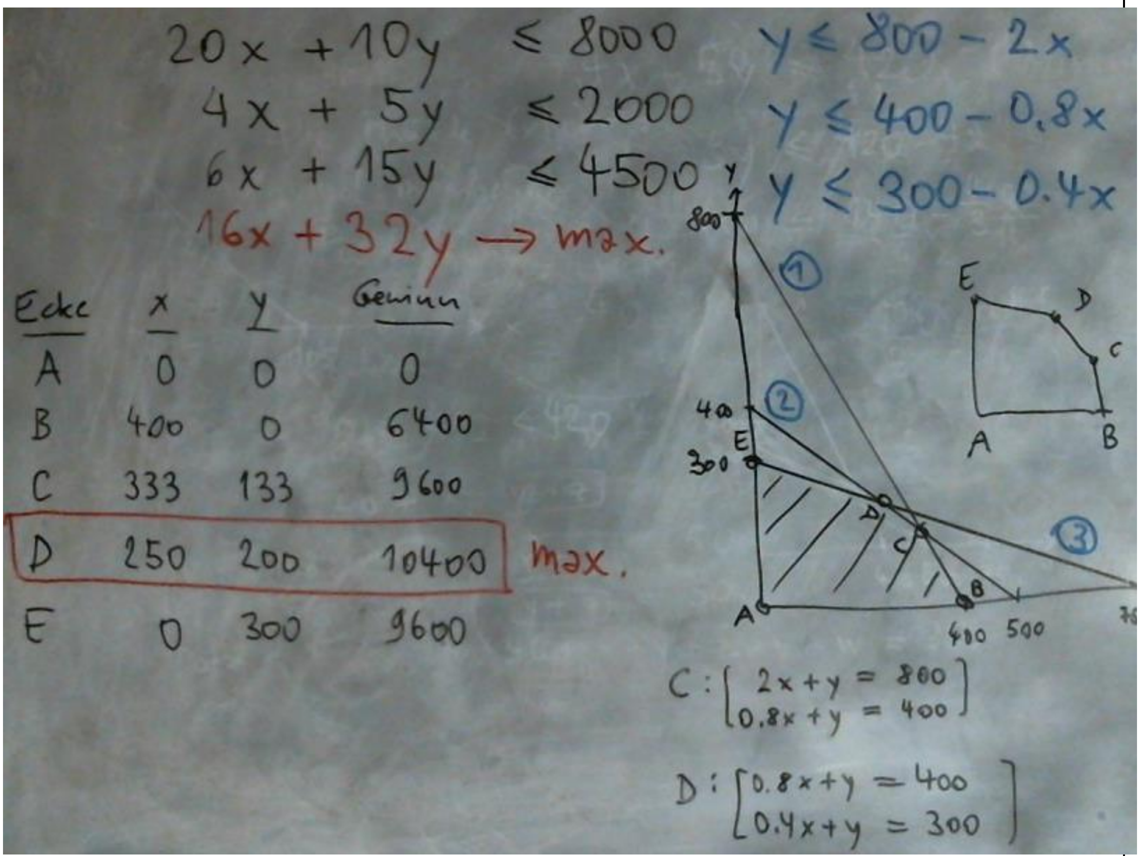
4. 11

x = Anzahl Damenschuhe
y = Anzahl Herrenschuhe

Ungleichungen:

$20x + 10y \leq 8000$	Zeit
$4x + 5y \leq 2000$	Maschinen
$6x + 15y \leq 4500$	Leder
$x \geq 0$	
$y \geq 0$	

Zielfunktion $16x + 32y \rightarrow \max$
Lösung: x = 250, y = 200, Gewinn = 10400



4. 12

x = Anzahl Tage mit Produktion von 10 Stück A
y = Anzahl Tage mit Produktion von 20 Stück B

Ungleichungen:

$10x + 20y \leq 1400$	max. Absatz
$x + y = 100$	Produktionstage
$x \geq 0$	
$y \geq 0$	

Zielfunktion $5000 \cdot 10x + 3000 \cdot 20y \rightarrow \max$
Lösung: x = 60, y = 40, Gewinn = 5400000

4\. 13 x = Anzahl Stück A
y = Anzahl Stück B

Ungleichungen:

$5x + 4y \leq 400$	Automat I
$3x + 6y \leq 420$	Automat II
$6x \leq 360$	Automat III
$x \geq 0$	
$y \geq 0$	

Zielfunktion $1.5x + 2y \rightarrow \max$
Lösung: x = 40, y = 50, Gewinn = 160

Lösung mit Simplex-Programm:

```
Lineare Optimierung

Anzahl Variable (max. 10): 2

1=Zielfunktion maximieren, 2=minimieren: 1
Koeffizienten der Zielfunktion: 1.5 2 0

Anzahl Bedingungen (max. 10): 3
Bedingungen in Form "<=" eingeben!
Koeffizienten und rechte Seite von Bedingung 1: 5 4 400
Koeffizienten und rechte Seite von Bedingung 2: 3 6 420
Koeffizienten und rechte Seite von Bedingung 3: 6 0 360

Resultate (nicht aufgeführte Variablen sind = 0):
  x1 =  40.000000
  x2 =  50.000000

  Wert der Zielfunktion: 160.000000

[Enter] drücken zum Weiterfahren
```

4. 14 x = Anzahl Modell 1

y = Anzahl Modell 2

Ungleichungen:

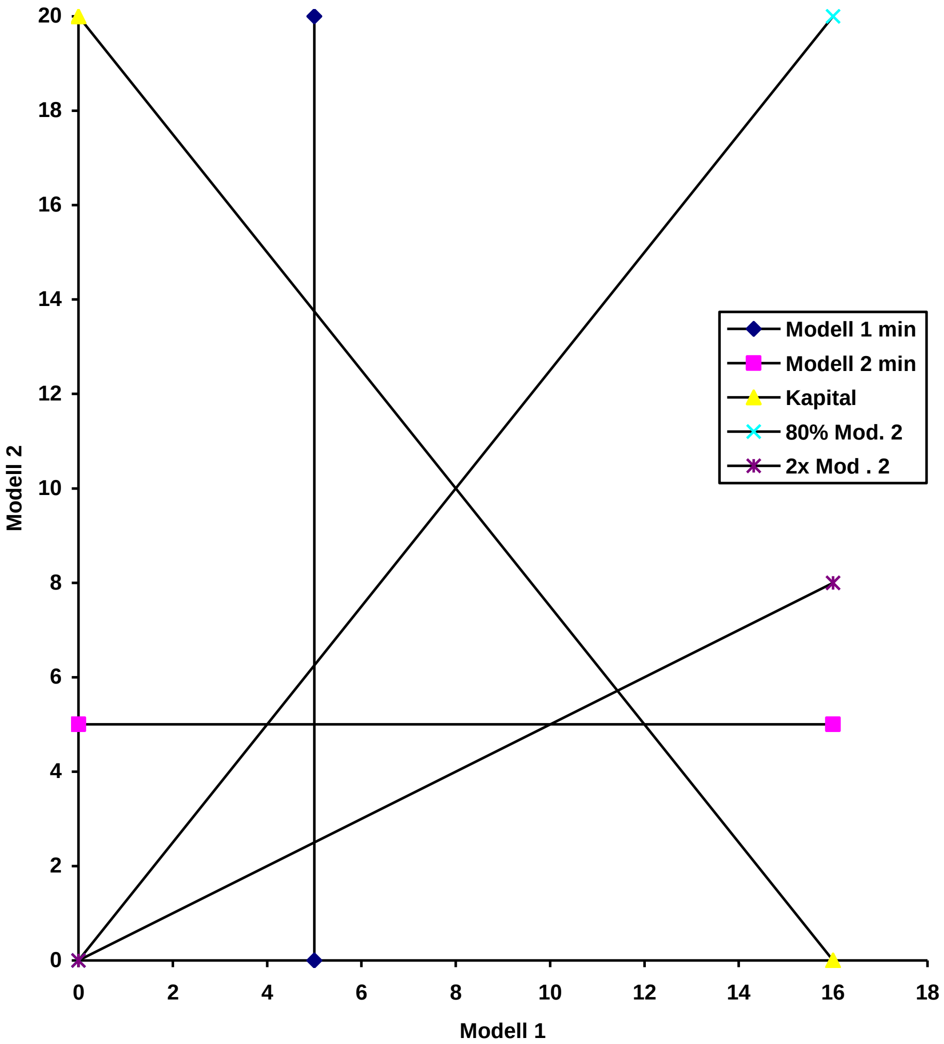
$x \geq 5$

$y \geq 5$

$1125x + 900y \leq 18000$ $y \leq 20 - 1.25x$ Investitionskapital

$x \geq 0.8y$ $y \leq 1.25x$

$x \leq 2y$ $y \geq 0.5x$



Eckpunkte des Lösungspolygons:

x = 5 / y = 5 / Gewinn = 3250

x = 5 / y = 6.25 / Gewinn = 3750

x = 8 / y = 10 / Gewinn = 6000

x = 11.43 / y = 5.71 / Gewinn = 5142.86

x = 10 / y = 5 / Gewinn = 4500

Die Gewinnfunktion $250x + 400y \rightarrow \max$ hat eine Steigung von $-250/400 = -0.625$.

4. 15 x: Anzahl Pakete A

y: Anzahl Pakete B

$$\begin{array}{lrcrcr}
(1) & & & x,y & \geq & 0 \\
(2) & 0{,}3x & + & 0{,}4y & \leq & 360 \\
(3) & 0{,}2x & + & 0{,}4y & \leq & 320 \\
(4) & 0{,}5x & + & 0{,}2y & \leq & 340
\end{array}$$

$$5{,}5x \;+\; 22y \;=\; z \rightarrow \text{max.}$$

Zielfunktion:

$$(1') \quad y \leq -\frac{4}{3}x + 900$$

$$(2') \quad y \leq -\frac{1}{2}x + 800$$

$$(3') \quad y \leq -2{,}5x + 1700$$

$$Z_0: \quad y = -\frac{1}{4}x + \Delta$$

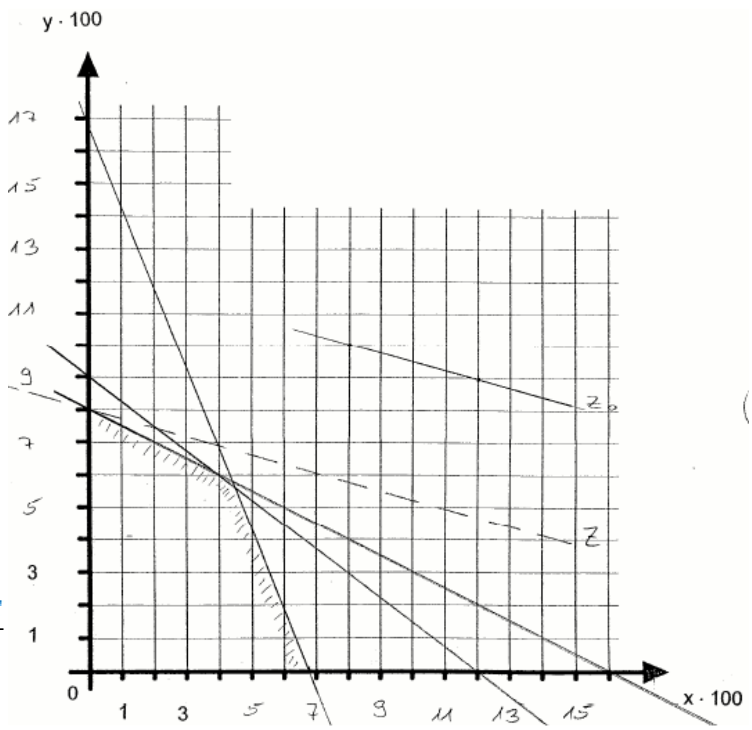
Aus der Grafik:

$$\mathbb{L} = \{0;800\}$$

- keine Pakete der Sorte A
- 800 Pakete der Sorte B

$$U_{\max} = 0 \cdot 5{,}5\frac{GE}{P} + 800P \cdot 22\frac{GE}{P}$$

$$= 17'600\ GE$$



Lösung mit Simplex-Programm:

```
Lineare Optimierung

Anzahl Variable (max. 10): 2

1=Zielfunktion maximieren, 2=minimieren: 1
Koeffizienten der Zielfunktion: 5.5 22 0

Anzahl Bedingungen (max. 10): 3
Bedingungen in Form "<=" eingeben!
Koeffizienten und rechte Seite von Bedingung 1: 0.3 0.4 360
Koeffizienten und rechte Seite von Bedingung 2: 0.2 0.4 320
Koeffizienten und rechte Seite von Bedingung 3: 0.5 0.2 340

Resultate (nicht aufgeführte Variablen sind = 0):
  x2 = 800.000000

  Wert der Zielfunktion: 17600.000000

[Enter] drücken zum Weiterfahren
```

4. 16	Es sind drei Punkte auf der Parabel gegeben: A (-1|1) B (1|2) C (4|-2) Diese Koordinaten setzen wir in den Ansatz $ax^2 + bx + c = y$ ein und erhalten die Gleichungen $a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 1$ $a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 2$ $a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = -2$ mit den Lösungen a = -11/30 b = 1/2 c = 28/15
4. 17	Es sind drei Punkte auf der Parabel gegeben, Lösung wie in 4.16: A (3|0) B (1|-2) C (-1|-1) a = 3/8 b = -1/2 c = -15/8
4. 18	Die Parabel ist symmetrisch um den Scheitel; am einfachsten ist die Lösung, indem man den Punkt am Scheitel spiegelt: S (-1|2) A (0.5|3) B (-2.5|3) (Punkt A an $x_S = -1$ gespiegelt) a = 4/9 b = 8/9 c = 22/9 Eine Lösung mit den Scheitelpunktsformeln ist ebenfalls möglich, aber mühsamer.
4. 19	Wie 4.18: S (-3|2.5) A (1|0) Vorsicht: Druckfehler im Buch! Punkt soll (1|0) sein. B (-7|0) (Punkt A an $x_S = -3$ gespiegelt) a = -5/32 b = -15/16 c = 35/32

4. 20	Wie 4.18: S (-1.5|4) A (0|3.5) $\Rightarrow$ c = 3.5 B (-3|3.5) (Punkt A an x_S = -1.5 gespiegelt) a = -2/9 b = -2/3 c = 7/2
4. 21	Wie 4.18: S (3.5|-8) A (2|-6) B (5|-6) (Punkt A an x_S = 3.5 gespiegelt) a = 8/9 b = -56/9 c = 26/9
4. 22	$\frac{1}{2}\cdot 9.81\frac{m}{s^2}\cdot t^2 = 1000m \Rightarrow t = 14.3s$ $v = 9.81\frac{m}{s^2}\cdot 14.3s = 140.1\frac{m}{s} \cong 504\frac{km}{h}$
4. 23	In der Ebene fliegt der Stein, bis er den Boden berührt - bis y = 0 ist. Es muss also sein $0 = y = \tan(\alpha)\cdot x - \frac{g}{2\cdot v^2\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot x^2 = \left(\tan(\alpha) - \frac{g}{2\cdot v^2\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot x\right)\cdot x$ Ein Produkt ist = 0, wenn mindestens einer seiner Faktoren = 0 ist. Für x = 0 erhalten wir den Punkt des Abschusses. Für die Nullstelle des Klammer-ausdruckes ergibt sich $x = \tan(\alpha)\cdot\frac{2\cdot v^2\cdot\cos^2(\alpha)}{g} = \frac{2\cdot v^2}{g}\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) = \frac{v^2}{g}\cdot\sin(2\cdot\alpha)$ Da der Sinus für 90° maximal ist, resultiert die maximale Schussweite für α = 45°. Wertetabelle mit dem TI-30X Pro (Winkeleinstellung DEG): v = 20 sto$\rightarrow$ a table Edit function f(x) = a²∗sin(2x)/[<u>constants</u>] g Start = 35 Step = 1 Auto CALC (Selbstverständlich kann man die Aufgabe auch als quadratische Gleichung lösen, wenn man nur an den numerischen Resultaten interessiert ist.)

4. 24 Die Masse müssen in mm sein.

Wir müssen die Winkelgeschwindigkeit von U/min in rad/s umrechnen:

$1 \cdot U = 2\pi \cdot rad$

$1 \cdot min = 60 \cdot s$

$$\omega = 750 \frac{U}{min} = 750 \frac{2\pi \cdot rad}{60 \cdot s} = 78.54 \frac{rad}{s}$$

$$y_0 = 40mm - \frac{(10mm)^2 \cdot \left(78.54 \frac{rad}{s}\right)^2}{2 \cdot 9810 \frac{mm}{s^2}} = 8.56mm$$

Wenn man mit dem TI-30X Pro mit $g = 9.80665 m/s^2$ rechnet, ergibt sich 8.549mm.

4. 25 Beigetragen von Leser Bernd Dietrich aus Farchant:

Wir legen legt den Koordinatenursprung in die Mitte der Fahrbahn und wählen die folgenden drei Punkte auf der Parabel, deren Koordinaten wir herauslesen bzw. berechnen:

A (-18|-3)

B (18|-3)

Scheitelpunkt (0|6)

Diese Koordinaten setzen wir in den Ansatz $ax^2 + bx + c = y$ ein und erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} a\cdot(-18)^2 &+ b\cdot(-18) + c = -3 \\ a\cdot 18^2 &+ b\cdot 18 + c = -3 \\ a\cdot 0^2 &+ b\cdot 0 + c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 6! \end{aligned}$$

mit den Lösungen

a = -1/36

b = 0

c = 6,

also

$$y = -\frac{1}{36} \cdot x^2 + 6$$

(Das lineare Glied b ist immer = 0, wenn die Kurve zur y-Achse symmetrisch liegt. Damit kann a ohne Gleichungssystem sofort gefunden werden aus $18^2 \cdot a = -9$.)

x_C und x_D sind die Nullstellen der Funktion, $x = \pm\sqrt{36 \cdot 6} = \pm 14.697$, und damit die Fahrbahnlänge 29.39m.

Bei der getroffenen Wahl des Koordinatensystems entsprechen die Grössen $h_1 - h_4$ direkt den y-Werten an den entsprechenden Stellen:

$h_1 = h_4 = y(5) = 3.22m$

$h_2 = h_3 = y(10) = 5.31m$

Selbstverständlich sind andere Lösungswege mit anders angeordneten Koordinatensystemen möglich, sie verursachen aber mehr Rechenaufwand.

4. 26	Es sind drei Punkte auf der Parabel gegeben: A (0|0) B (284.6|-21.2) C (142.3|-18.4) Diese Koordinaten setzen wir in den Ansatz $ax^2 + bx + c = y$ ein und erhalten die Gleichungen $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$ $a \cdot 284.6^2 + b \cdot 284.6 + c = -21.2$ $a \cdot 142.3^2 + b \cdot 142.3 + c = -18.4$ mit den Lösungen a = 0.00038519869 b = -0.1841180604 c = 0 (Das konstante Glied c ist immer = 0, wenn die Kurve durch den Koordinatenursprung geht, man kann also diesen Punkt auch weglassen und 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten a und b lösen.) Der Scheitelpunkt liegt bei $x_S = -\frac{b}{2 \cdot a} = 238.99$ $y_S = c - \frac{b^2}{4 \cdot a} = -22.00$
4. 27	$(F - 32) \cdot \frac{5}{9} = F$ $F = -40$