9 Gleichungen, Ungleichungen

Aufgabe 202: a) Für welche c hat die Ungleichung $(c + 2)(5 - c) \leq c - 5$ Gültigkeit ?

b) Für welchen x-Bereich ist die folgende Ungleichung gültig ?
$(x - 2)(2x + 3)(12 - 3x) < 0$.

Lösung 202: a) In ein Produkt umformen: $(c + 2)(5 - c) \leq c - 5 \Rightarrow (5 - c)(c + 3) \leq 0$. Damit ist $c \geq 5$ oder $c \leq -3$.

b) Die Fallunterscheidungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

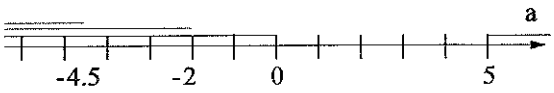
1.Faktor	2.Faktor	3.Faktor	
-	+	+	$-1.5 < x < 2$
+	-	+	-
+	+	-	$4 < x$
-	-	-	-

Aufgabe 203: Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt diese Ungleichung $(c + 5)(2 - c) \geq c - 2$?

Lösung 203: $(c + 5)(2 - c) \geq c - 2 \Rightarrow (c + 6)(2 - c) \geq 0$
Ein Produkt ist positiv, wenn eine gerade Anzahl Faktoren negativ ist.
$\Rightarrow -6 \leq c \leq 2$.

Aufgabe 204: Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt diese Ungleichung $\frac{5a - a^2}{(a + 2)(2a + 9)} \geq 0$.

Lösung 204: Um das Vorzeichen eines Quotienten beurteilen zu können, werden Zähler und Nenner faktorisiert:
$\frac{5a - a^2}{(a + 2)(2a + 9)} = \frac{a(5 - a)}{(a + 2)(2a + 9)} \geq 0$. Ein Quotient ist positiv, wenn eine gerade Anzahl Faktoren von Zähler und Nenner negativ ist.
$\Rightarrow -4.5 < a < -2 \vee 0 \leq a \leq 5$



Aufgabe 205: In welchem Bereich für a gilt die folgende Ungleichung: $\frac{(a^2 + 3a)(a + 2)^2}{(2a + 3)(4 - a)} \leq 0$

Lösung 205: $\frac{(a^2 + 3a)(a + 2)^2}{(2a + 3)(4 - a)} = \frac{a(a + 3)(a + 2)^2}{(2a + 3)(4 - a)} \leq 0$:
Es sind 6 Faktoren, von denen zwei identisch sind.
$(a + 2)^2$ hat keinen Einfluss auf das Vorzeichen und kann deshalb weggelassen werden. Es ist aber zu beachten, dass für $x = -2$ die Ungleichung erfüllt ist.
Der verbleibende Ausdruck ist negativ, wenn eine ungerade Anzahl Faktoren negativ ist.
$\Rightarrow a \leq -3 \vee a = -2 \vee -1,5 < a \leq 0 \vee 4 < a$

Aufgabe 206: Für welche Werte von a ist der Ausdruck $\sqrt{\frac{a^2 - 4a}{a + 5}}$ definiert ?

Lösung 206: Der Radikand muss positiv sein, d.h. $\frac{a(a-4)}{a+5} \geq 0$

=> je zwei Faktoren haben gleiche Vorzeichen, während der dritte Faktor positiv ist.
Fallunterscheidung:

a	a - 4	a + 5
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

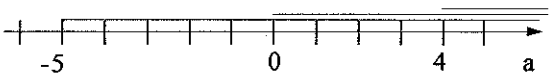
=> $-5 < a \leq 0 \vee 4 \leq a$

oder:

Die Anzahl negativer Faktoren von $\frac{a(a-4)}{a+5}$ muss gerade sein: $-5 < a \leq 0 \vee 4 \leq a$

oder:

In der gegebenen Situation muss eine ungerade Anzahl Faktoren positiv sein. $-5 < a \leq 0 \vee 4 \leq a$



Aufgabe 207: Für welche Werte von a ist der Ausdruck $\sqrt{\frac{|a-3|(a-2)}{(a-5)|a+3|}}$ im Bereich der reellen Zahlen definiert.

Lösung 207: Der Ausdruck unter der Wurzel muss positiv sein: $0 \leq \frac{|a-3|(a-2)}{(a-5)|a+3|}$

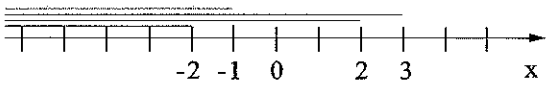
Ein Produkt ist positiv, wenn eine gerade Anzahl Faktoren negativ ist. Da Beträge positiv sind, fallen sie ausserhalb der Stellen, wo sie von Null verschieden sind ausser betracht.
$a < -3 \vee -3 < a \leq 2 \vee a = 3 \vee 5 < a$

Aufgabe 208: Lösen Sie die folgende Ungleichung: $\frac{(x-1)(x^2-x-6)|x|}{(x-2)(x^2-1)} \leq 0$

Lösung 208: $\frac{(x-1)(x^2-x-6)|x|}{(x-2)(x^2-1)} = \frac{(x-1)(x+2)(x-3)|x|}{(x-2)(x-1)(x+1)} \leq 0$

=> $\frac{(x+2)(x-3)|x|}{(x-2)(x+1)} \leq 0$, falls $x \neq 1$

=> $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$, falls $x \neq 1 \wedge x \neq 0$



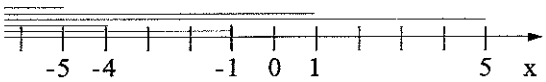
Ein Quotient ist negativ, wenn eine ungerade Anzahl Faktoren von Zähler und Nenner negativ ist.
=> $-2 \leq x < -1 \vee 2 < x \leq 3$, falls $x \neq 1 \wedge x \neq 0$
Ist $x = 0$, so ist die Ungleichung erfüllt.
Ist $x = 1$, so ist der gegebene Ausdruck nicht definiert, was hier keine Rolle spielt, da hier $x = 1$ ohnehin nicht zum Lösungsbereich gehört.
=> $-2 \leq x < -1 \vee 2 < x \leq 3 \vee x = 0$

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 209: Lösen Sie die folgende Ungleichung: $\frac{|x|(x^2-16)(x^2-6x+5)}{(x+5)(x^2-3x-4)} \le 0$

Lösung 209: $\frac{|x|(x^2-16)(x^2-6x+5)}{(x+5)(x^2-3x-4)} = \frac{|x|(x-4)(x+4)(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-4)(x+1)} \le 0$

$\Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)(x-5)}{(x+5)(x+1)} \le 0$, falls $x \ne 0 \wedge x \ne 4$



$\Rightarrow x < -5 \vee -4 \le x < -1 \vee x = 0 \vee 1 \le x < 4 \vee 4 < x \le 5$

Aufgabe 210: Lösen Sie die Ungleichung: $\frac{x^2-1}{x^2-4} \le \frac{|x+1|}{(x-2)^2}$

Lösung 210: Ein Quotient ist negativ, wenn eine ungerade Anzahl Faktoren von Zähler und Nenner negativ ist.

$\frac{x^2-1}{x^2-4} \le \frac{|x+1|}{(x-2)^2}$

$\Leftrightarrow$ $(x^2-4)(x-2)^2(x^2-1) - (x^2-4)^2|x+1| \le 0$, falls $x \ne -2, x \ne 2$

$\Leftrightarrow$ $(x+2)(x-2)^2(x+1)((x-2)(x-1) - (x+2)) \le 0$, falls $x \ne 2, x \ne -2, -1 \le x$

$(x+2)(x-2)^2(x+1)((x-2)(x-1) + (x+2)) \le 0$, falls $x \ne 2, x \ne -2, -1 \le x$

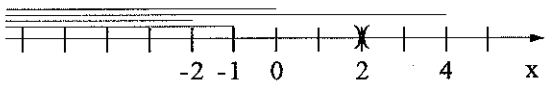
$\Leftrightarrow$ $(x+2)(x-2)^2(x+1)(x-4)x \le 0$, falls $x \ne 2, x \ne -2, -1 \le x$

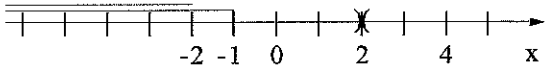
$(x+2)(x-2)^2(x+1)(x^2-2x+4) \le 0$, falls $x \ne 2, x \ne -2, x \le -1$

$\Leftrightarrow$ $(x+2)(x-2)^2(x+1)(x-4)x \le 0$, falls $x \ne 2, x \ne -2, -1 \le x$

$(x+2)(x-2)^2(x+1) \le 0$, falls $x \ne 2, x \ne -2, x \le -1$

$\Leftrightarrow$ $-2 \le x \le -1 \vee 0 \le x < 2 \vee 2 < x \le 4$





Aufgabe 211: Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $4|3x+7| \le 24$

b) $10 - |3+5x| \le 0$

c) $|x| + 4x > 2 - 7|x|$

Lösung 211: a) $4|3x+7| \le 24 \Rightarrow |3x+7| \le 6$

Fallunterscheidung:

1. $3x+7 \ge 0 \Rightarrow 3x+7 \le 6$, d.h. $x \ge -\frac{7}{3} \Rightarrow x \le -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{7}{3} \le x \le -\frac{1}{3}$

   $3x+7 \ge 0$ ist der Definitionsbereich von $3x+7 \le 6$

2. $3x+7 < 0 \Rightarrow -3x-7 \le 6$, d.h. $x < -\frac{7}{3} \Rightarrow x \ge -\frac{13}{3} \Rightarrow -\frac{13}{3} \le x < -\frac{7}{3}$

   $3x+7 < 0$ ist der Definitionsbereich von $-3x-7 \le 6$

Die beiden Fälle können vereinigt werden: $-\frac{13}{3} \le x \le -\frac{1}{3}$

oder:

$4|3x+7| \le 24 \Rightarrow ||3x+7| \le 6 \Rightarrow -6 \le 3x+7 \le 6 \Rightarrow -13 \le 3x \le -1 \Rightarrow -\frac{13}{3} \le x \le -\frac{1}{3}$

b) $10 - |3+5x| \le 0 \Rightarrow 10 \le 3+5x \vee 3+5x \le -10 \Rightarrow 7 \le 5x \vee 5x \le -13 \Rightarrow \frac{7}{5} \le x \vee x \le -\frac{13}{5}$

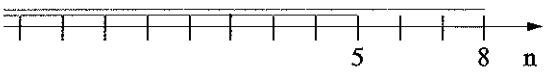
c) $|x| + 4x > 2 - 7|x| \Rightarrow 4|x| + 2x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{6}, \text{ falls } x \geq 0 \\ x < -\frac{1}{2}, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$.

Die Bedingungen können fallen gelassen werden, da sie ohnehin erfüllt sind: $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{6}$

Aufgabe 212: a) Für welche natürliche Zahlen n gilt: $n^2 + 40 > 13n$

b) Beweisen Sie ihre Behauptung mittels vollständiger Induktion.

Lösung 212: a) $n^2 + 40 > 13n \Rightarrow n^2 - 13n + 40 = (n - 8)(n - 5) > 0$
Ein Produkt ist positiv, wenn eine gerade Anzahl Faktoren negativ ist.
$\Rightarrow 0 < n < 5 \vee 8 < n \wedge n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 9, 10 ....\}$



b) Die vollständige Induktion kommt nur für $n > 8$ in Frage. Für $n \in \{1, 2, 3, 4, 9\}$ wurde die Ungleichheit bereits direkt bewiesen.
Induktionsannahme: $n^2 + 40 > 13n$
Induktionsbehauptung: $(n + 1)^2 + 40 > 13(n + 1)$
Induktionsschritt: $(n + 1)^2 + 40 = n^2 + 40 + 2n + 1 > 15n + 1 > 13n + 13$, falls $n > 6$
Da $n > 9$, ist die Bedinung erfüllt.

Aufgabe 213: Betrachten Sie die Funktion $y = \frac{1}{1 + x^2}$. Geben Sie vier Eigenschaften dieser Funktion an.

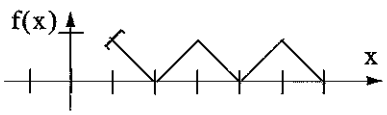
Lösung 213:
- y ist gerade.
- y ist positiv definit
- y ist beschränkt
- y ist stetig
- y ist surjektiv bei der entsprechenden Einschränkung des Wertebereiches:
  $D(y) = \mathbb{R}$; $W(y) = (0, 1]$
- y ist bijektiv bei der entsprechenden Einschränkung des Definitions- und Wertebereiches:
  $D(y) = \mathbb{R}_+$; $W(y) = (0, 1]$ resp. $D(y) = \mathbb{R}_-$; $W(y) = (0, 1]$
  $y^{-1} = \pm \frac{1 - x}{x}$, wobei $D(y^{-1}) = (0, 1]$

Aufgabe 214: Wie lautet die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $P(p, q)$ geht und normal zur Geraden mit der Gleichung $y = ax + b$ steht.

Lösung 214: Die Punktrichtungsform der Gleichung der gesuchten Geraden lautet: $y - q = -\frac{1}{a}(x - p)$

Aufgabe 215: Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion: $f(x) = |x - 2i|$, für $2i - 1 \leq x < 2i + 1$, wobei $i \in \mathbb{N}$.

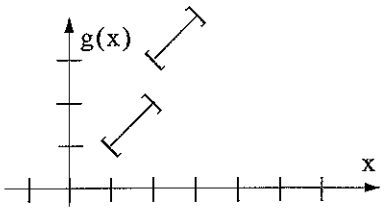
Lösung 215: Für jedes i ergibt sich einen neuen Bereich, d.h. der Definitionsbereich der Funktion f(x) ist aus Intervallen zusammengesetzt. Innerhalb der einzelnen Intervalle handelt es sich um lineare Funktionen.



© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 216: Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $g(x) = x + i - 1$, für $i \leq x \leq i + 1 \wedge i \in \mathbb{N}$.

Lösung 216: $g(x)$ stellt keine Funktion dar, da für $x \in \mathbb{N}$ zwei Werte existieren. Es können aber trotzdem die Punkte $P(x/y)$ angegeben werden, deren Koordinaten die Gleichung
$y = x + i - 1$, für $i \leq x \leq i + 1 \wedge i \in \mathbb{N}$ erfüllen.

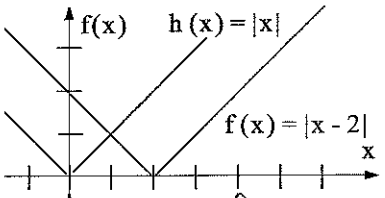


Aufgabe 217: Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen auf:

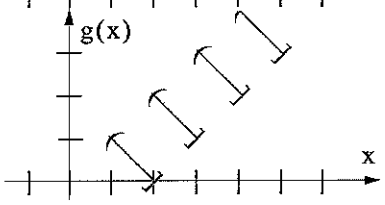
a) $f(x) = |x - 2|$

b) $g(x) = |x - 2i|$ für $i \in \mathbb{N}$ und $i < x \leq i + 1$

Lösung 217: a) Verschiebung des Graphen der Funktion $h(x) = |x|$

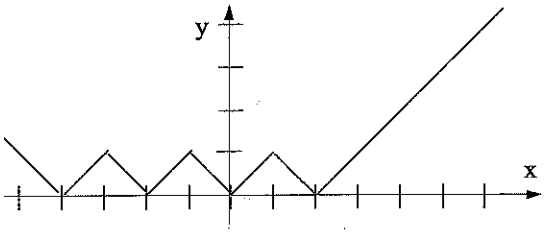


b) Für jedes i ergibt sich einen neuen Bereich, d.h. der Definitionsbereich der Funktion f(x) ist aus Intervallen zusammengesetzt. Innerhalb der einzelnen Intervalle handelt es sich um lineare Funktionen. Die Strecken sind links offen und rechts abgeschlossen.



Aufgabe 218: Skizzieren Sie den Gaph der Funktion $y = |||x + 1| - 1| - 1| - 1|$

Lösung 218:



Aufgabe 219: Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

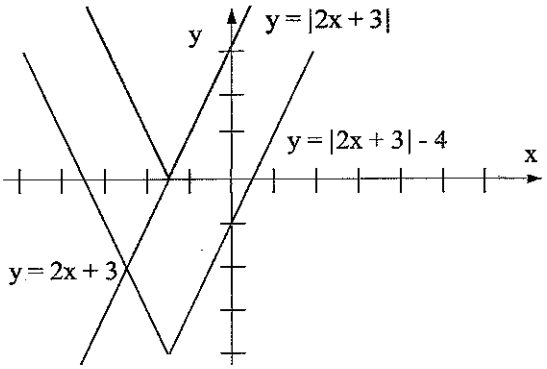
a) $y = |2x + 3| - 4$

b) $y = |x + 2| + |x - 3|$

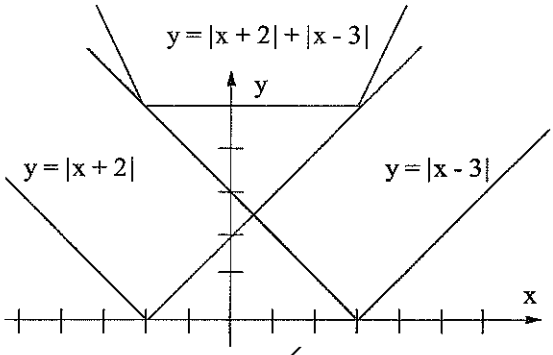
c) $y = |x + 3| - |x - 1|$

d) $y = ||x + 2| - |x - 2||$

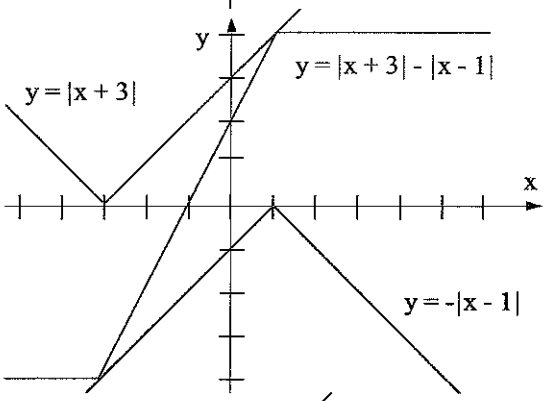
Lösung 219: a) Der Graph der Funktion wird sukzessiv ermittelt.
$y = 2x + 3$
$y = |2x + 3|$
$y = |2x + 3| - 4$



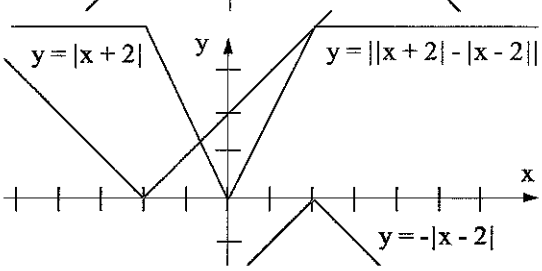
b) Überlagerung zweier Graphen:
$y = |x + 2|$
$y = |x - 3|$
$y = |x + 2| + |x - 3|$



c) Überlagerung zweier Graphen:
$y = |x + 2|$
$y = -|x - 1|$
$y = |x + 3| - |x - 1|$



d) $y = |x + 2| - |x - 2|$ ist analog zu c), aber symmetrisch bezüglich des Ursprungs



Aufgabe 220: Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $y = \frac{1}{2}\,|x - 2| + x$

b) $y = |\frac{1}{2}\,x - 2| + 2 - x$

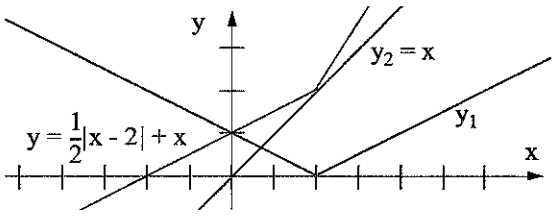
c) $y = 3 - |\frac{1}{3}\,x + \frac{1}{2}| + \frac{1}{3}\,|x|$

d) $y = 4 - 2x + ||\,x - 1| - 2|$

e) $y = |4 - 2x| - ||\,x - 1| - 2|$

Lösung 220: a) Überlagerung der beiden Funktionen
$y_1 = \frac{1}{2}\,|x - 2|$ und $y_2 = x$

$y = \frac{1}{2}\,|x - 2| + x$

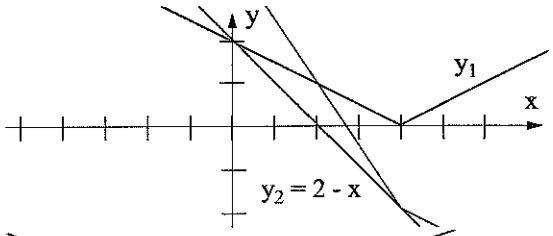


© 2000 Verlag ad-librum

b) Überlagerung der beiden Funktionen

$y_1 = |\frac{1}{2}x - 2|$ und $y_2 = 2 - x$

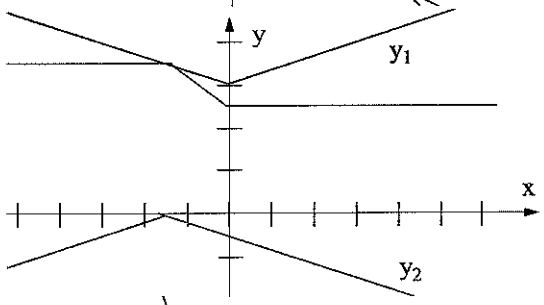
$y = |\frac{1}{2}x - 2| + 2 - x$



c) Überlagerung der beiden Funktionen

$y_1 = 3 + \frac{1}{3}|x|$ und $y_2 = -|\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}|$

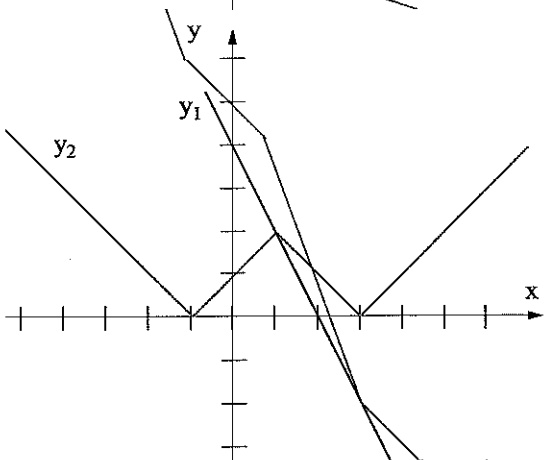
$y = 3 - |\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}| + \frac{1}{3}|x|$



d) Überlagerung der beiden Funktionen

$y_1 = 4 - 2x$ und $y_2 = ||x - 1| - 2|$

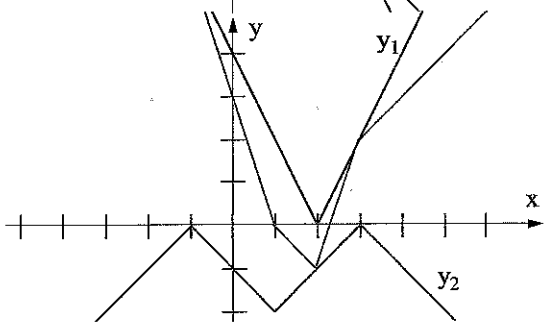
$y = 4 - 2x + ||x - 1| - 2$



e) Überlagerung der beiden Funktionen

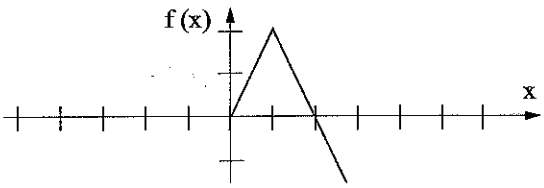
$y_1 = |4 - 2x|$ und $y_2 = -|||x - 1| - 2||$

$y = |4 - 2x| - |||x - 1| - 2||$



Aufgabe 221: a) Wie lautet die Gleichung der in der Skizze dargestellten Kurve?

b) Stellen Sie das Gebiet durch ein System dar, welches alle Punkte enthält, welche nicht im Gebiet zwischen der Kurve und der x-Achse liegt.



Lösung 221: a) $y = \begin{cases} 2x, \text{ falls } 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x, \text{ falls } x \ge 1 \end{cases}$

oder:

Die Kurve erinnert an die Kurve mit der Gleichung $y = |x|$. Sie muss nun so abgeändert werden, dass die entsprechende Kurve entsteht.

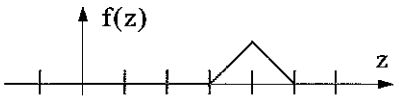
1. Schritt: $y = |2x|$
2. Schritt: $y = -|2x|$
3. Schritt: $y = -|2(x - 1)|$

© 2000 Verlag ad-librum

4. Schritt: $y = 2 - |2(x - 1)|$ für $x \geq 0$

b) Das Gebiet wird durch die folgenden beiden logischen Verknüpfung dargestellt.
$y \geq 2 - |2(x - 1)| \wedge y \geq 0$ resp. $y \leq 2 - |2(x - 1)| \wedge y \leq 0$
Esgilt: $y \geq 2 - |2(x - 1)| \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow y < 2 - |2(x - 1)| \vee y < 0 \Leftrightarrow y - 2 + |2(x - 1)| < 0 \vee y < 0$
resp.
$y \leq 2 - |2(x - 1)| \wedge y \leq 0 \Leftrightarrow y > 2 - |2(x - 1)| \vee y > 0 \Leftrightarrow y - 2 + |2(x - 1)| > 0 \vee y > 0$
Dies kann durch die Ungleichung $(y - 2 + |2(x - 1)|)y > 0$ beschrieben werden. Das gesuchte Gebiet wird durch die letzte Ungleichung für $x > 0$ beschrieben.

Aufgabe 222: Die Ausssage „z ist nahe bei 4" hat die folgende Wahrheitsfunktion:
Geben Sie eine algebraische Beschreibung dieser Funktion an.



Lösung 222:
$$f(z) = \begin{cases} z - 3, \text{ falls } 3 \leq z \leq 4 \\ -z + 5, \text{ falls } 4 \leq z \leq 5 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

oder:
$$f(z) = \begin{cases} 1 + -|z - 4|, \text{ falls } 3 \leq z \leq 5 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 223: Negieren Sie die folgenden Aussagen, ohne das Wort „nicht" zu verwenden:

a) Die Funktion f ist beschränkt.

b) Die Funktion f ist monoton.

Lösung 223: a) Die Funktion f ist gegen oben oder unten unbeschränkt.

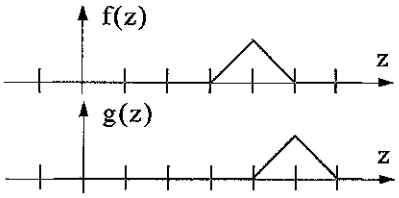
b) Die Funktion ist weder monoton wachend, monoton fallend noch monoton gleichbleibend.

Aufgabe 224: Skizzieren Sie möglichst genau die Graphen der Wahrheitsfunktionen, welche zu den folgenden Aussagen gehören, wobei A und B Aussagen mit der entsprechenden Wahrheitsfunktionen f(z) und g(z) sind:
A: Die Zahl z ist nahe bei 4.

B: Die Zahl z ist nahe bei 5.

a) A => B

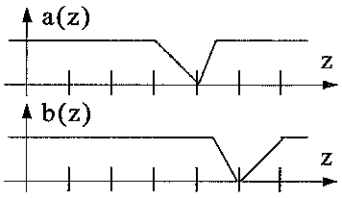
b) B => A



Lösung 224: In der Fuzzy-Logik gilt die Lukasiewicz-Implikation:
Mit der Gödel-Implikation sehen die Wahrheitsfunktionen wie folgt aus:

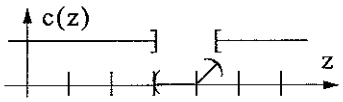
a) $a(z) = \min(1, 1 + g(z) - f(z))$

b) $b(z) = \min(1, 1 + f(z) - g(z))$

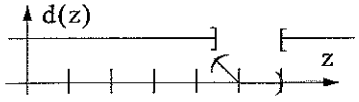


© 2000 Verlag ad-librum

c) $c(z) = \begin{cases} 1, \text{ falls } f(z) < g(z) \\ g(z), \text{ sonst} \end{cases}$



d) $c(z) = \begin{cases} 1, \text{ falls } g(z) < f(z) \\ f(z), \text{ sonst} \end{cases}$



Aufgabe 225: Skizzieren Sie möglichst genau die Graphen der Wahrheitsfunktionen, welche zu den folgenden Aussagen gehören, wobei unter A und B folgende Aussagen zu verstehen sind:
A: $z = 4$
B: $z = 5$

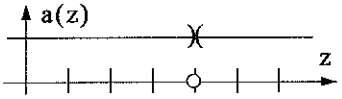
a) $A \Rightarrow B$

b) $A \vee B$

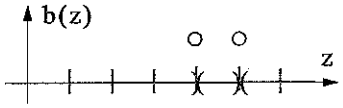
c) $\neg B \wedge A$

d) $B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

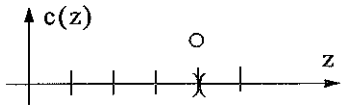
Lösung 225: a) Die Aussage ist für jedes z wahr, ausser wenn $z = 4$



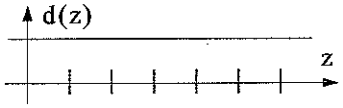
b) Es ist eine diskrete Funktion:



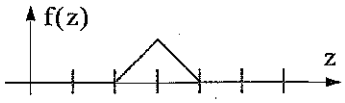
c) Es ist eine diskrete Funktion:



d) Die Aussage ist für jedes z wahr:



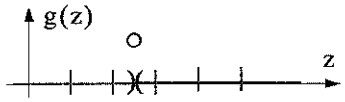
Aufgabe 226: Die Wahrheitsfunktion der Aussage „z ist nahe 3“ hat folgenden Graphen:
Skizzieren Sie den Graphen der Wahrheitsfunktion der Aussage A:



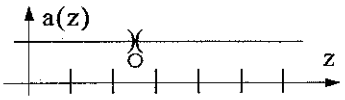
a) Ist $z = 2{,}5$, so ist z nahe bei 3.

b) Ist z nahe bei 3, so ist $z = 2{,}5$

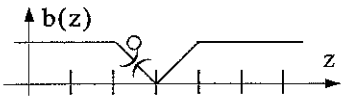
Lösung 226: Die Wahrheitsfunktion der Aussage „z ist 2,5“ hat folgenden Graphen:



a) Nach Lukasiewicz gilt: $a(A) = a(z) = \min(1, 1 + f(z) - g(z))$

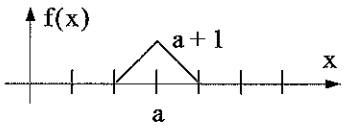


b) Nach Lukasiewicz gilt: $b(A) = b(z) = \min(1, 1 + g(z) - f(z))$



© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 227: Betrachten Sie die Relation ungefährgleich, welche mit dem Symbol ≈ dargestellt wird. Die Wahrheitswerte von x ≈ a werden durch die folgende Graphik definiert.



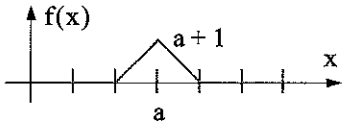
a) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussage:
$3{,}5 \approx 4 \wedge 4 \approx 4{,}5 \Rightarrow 3{,}5 \approx 4{,}5$

b) Ist diese Relation ≈ transitiv? Geben Sie eine Begründung für Ihre Antwort.

Lösung 227: a) Der Wahrheitswert von $3{,}5 \approx 4$ beträgt nach Definition 0,5
Der Wahrheitswert von $4 \approx 4{,}5$ beträgt nach Definition 0,5
=> Der Wahrheitswert von $3{,}5 \approx 4 \wedge 4 \approx 4{,}5$ wegen der Definition von „und"beträgt: 0,5
Der Wahrheitswert von $3{,}5 \approx 4{,}5$ beträgt nach Definition 0
=> Der Wahreitswert von $3{,}5 \approx 4 \wedge 4 \approx 4{,}5 \Rightarrow 3{,}5 \approx 4{,}5$ beträgt nach Lukasiewicz:
$\min(1, 1 + 0 - 0{,}5) = 0{,}5$

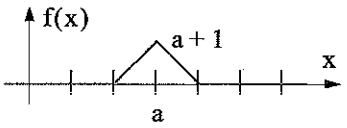
b) Aus der Lösung von a) ist sofort ersichtlich, dass die Relation ≈ nicht transitiv ist.

Aufgabe 228: Betrachten Sie die Relation ungefährgleich, welche mit dem Symbol ≈ dargestellt wird. Die Wahrheitswerte von x ≈ a werden durch die folgende Graphik definiert. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussage:
$3{,}75 \approx 4 \wedge 4 \approx 4{,}5 \Rightarrow 3{,}75 \approx 4{,}5$

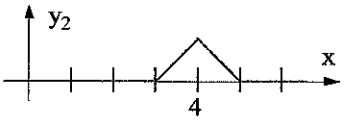


Lösung 228: Der Wahrheitswert von $3{,}75 \approx 4$ beträgt nach Definition 0,75
Der Wahrheitswert von $4 \approx 4{,}5$ beträgt nach Definition 0,5
=> Der Wahrheitswert von $3{,}75 \approx 4 \wedge 4 \approx 4{,}5$ beträgt 0,5
Der Wahrheitswert von $3{,}75 \approx 4{,}5$ beträgt nach Definition 0,25
=> Der Wahreitswert von $3{,}75 \approx 4 \wedge 4 \approx 4{,}5 \Rightarrow 3{,}75 \approx 4{,}5$ beträgt nach Lukasiewicz:
$\min(1, 1 + 0{,}25 - 0{,}5) = 0{,}75$

Aufgabe 229: Betrachten Sie die Relation ungefährgleich, welche mit dem Symbol ≈ dargestellt wird. Die Wahrheitswerte von x ≈ a werden durch die folgende Graphik definiert. Für welche Werte von x ist die Aussage $3{,}25 \approx 4 \wedge 4 \approx x \Rightarrow 3{,}25 \approx x$ nicht richtig?



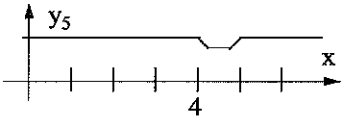
Lösung 229: Der Wahrheitswert von $3{,}25 \approx 4$ beträgt nach Definitionunabhängig von x $0{,}25 = y_1$.
Der Wahrheitswert von $4 \approx x$ wird durch die in der nebenstenden Skizze dargestellen Funktion dargestellt: y_2.



=> Der Wahrheitswert von $3{,}25 \approx 4 \wedge 4 \approx x$ wird durch die in der nebenstenden Skizze dargestellen Funktion dargestellt:
$y_3 = \min(y_1, y_2)$.

Der Wahrheitswert von $3{,}25 \approx x$ wird durch die in der nebenstenden Skizze dargestellen Funktion dargestellt: y_4.

=> Der Wahreitswert von $3{,}25 \approx 4 \wedge 4 \approx x \Rightarrow 3{,}25 \approx x$ beträgt nach Lukasiewicz: $y_5 = \min(1, 1 + y_4 - y_3)$.



=> Die Aussage ist für $4 < x < 5$ nicht richtig, aber auch nicht falsch.

Aufgabe 230: Formulieren Sie das logische Gegenteil der folgenden Sätze, ohne das Wort „nicht" resp. das Zeichen ¬ zu gebrauchen.

© 2000 Verlag ad-librum

a) $a < b \leq c \Leftrightarrow a^2 < b^2 \leq c^2$

b) $x = 3 \Rightarrow x \approx 3$

Lösung 230: a) $\neg (a < b \leq c \Leftrightarrow a^2 < b^2 \leq c^2) \Leftrightarrow a < b \leq c \oplus a^2 < b^2 \leq c^2$
$\Leftrightarrow$ Entweder ist $a < b \leq c$ oder $a^2 < b^2 \leq c^2$

b) $x = 3 \Rightarrow x \approx 3$ ist stets eine wahre Aussage, denn es gilt:
$x \neq 3 \Rightarrow \delta(x) = \min(1, 1 + y - 0) = 1$
$x = 3 \Rightarrow \delta(x) = \min(1, 1 + 1 - 1) = 1$
Also ist das logische Gegenteil stets falsch.

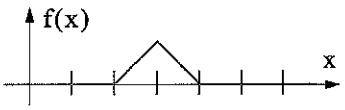
Aufgabe 231: Negieren Sie die folgenden Aussagen

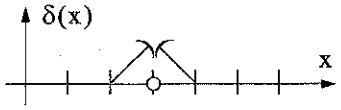
a) $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

b) $x \approx 3 \Rightarrow x = 3$

Lösung 231: a) Es handelt sich um scharfe Aussagen, sodass mit der klassischen Logik gearbeitet werden kann.
Die Aussage hat die folgende Form $A \Leftrightarrow B \wedge C$
Die Negation hat die folgende Form: $\neg (A \Leftrightarrow B \wedge C) \Leftrightarrow A \oplus (B \wedge C)$
Entweder ist $|x| < 1$ oder $-1 < x < 1$.

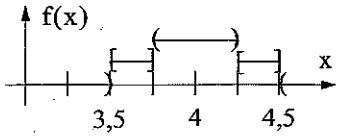
b) Die Aussage ist von folgender Form: $A \Rightarrow B$
$x \approx 3$ ist ein unscharfer Begriff und ist zuerst zu definieren. Dabei gibt es beliebig viele Möglichkeiten, wobei die in der nebenstenden Skizze dargestellen Funktion eine solche Möglichkeit darstellt.
Nach Lukasiewicz gilt für die Negation:
$x \neq 3 \Rightarrow \delta(x) = 1 - \min(1, 1 + 0 - f(x))$
$x = 3 \Rightarrow \delta(x) = 1 - \min(1, 1 + 1 - 1) = 0$



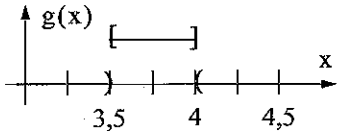


Aufgabe 232: Sei in einer dreiwertigen Logik $x \approx a$ wahr, wenn x weniger als ein Viertel von a abweicht und ist die Abweichung mehr als 0,5, so sei die Aussage $x \approx a$ falsch. Geben Sie aufgrund der Definition die charkteristische Funktion der folgenden Aussage und deren Umkehrung an:
$x \approx 4 \Rightarrow 3{,}5 \leq x \leq 4$.

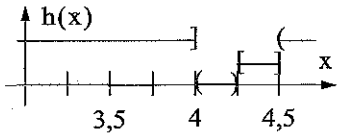
Lösung 232: a) Es handelt sich um einer dreiwertige Logik:
Wahrheitsfunktion von $x \approx 4$:



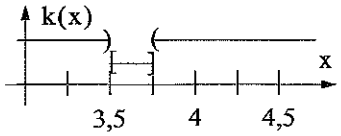
Wahrheitsfunktion von $3{,}5 \leq x \leq 4$:



Wahrheitsfunktion von $x \approx 4 \Rightarrow 3{,}5 \leq x \leq 4$:
Die Aussage ist falsch, wenn $4 < x < 4{,}25$.
Die Aussage ist möglich, wenn $4{,}25 \leq x \leq 4{,}5$.
Sonst ist die Aussage wahr.



b) Wahrheitsfunktion von $3{,}5 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \approx 4$:
Die Umkehrung der Aussage ist möglich, wenn $3{,}5 \leq x \leq 3{,}75$.
Sonst ist die Aussage wahr.

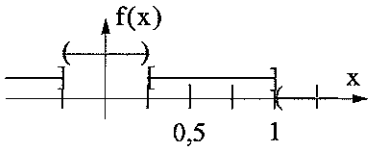


Aufgabe 233: Sei in einer dreiwertigen Logik $x \approx a$ wahr, wenn x weniger als 0,25 von a abweicht und ist die Abweichung mehr als 1, so sei die Aussage $x \approx a$ falsch. Für welche Werte von x sind die folgenden Aussageformen wahre Aussagen?

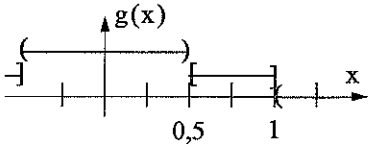
a) $x \approx 0 \Rightarrow x^2 \approx 0^2$

b) $x^2 \approx 1^2 \Rightarrow x \approx 1$

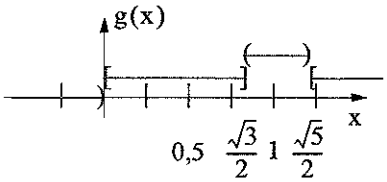
Lösung 233: a) Wahrheitsfunktion von $x \approx 0$:



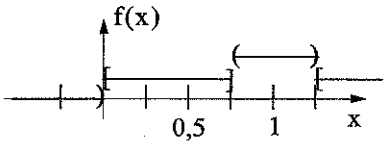
Wahrheitsfunktion von $x^2 \approx 0$:
Da $f(x) \leq g(x)$ ist die Aussage stets wahr, es handelt sich um eine Tautologie.



b) Wahrheitsfunktion von $x^2 \approx 1^2$:



Wahrheitsfunktion von $x \approx 1$:
Da $f(x) \leq g(x)$ ist die Aussage stets wahr, es handelt sich um eine Tautologie.

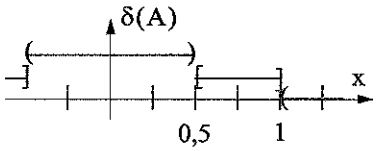


Aufgabe 234: Sei in einer dreiwertigen Logik die Abschätzung $x \approx a$ wahr, wenn x weniger als 0,25 von a abweicht und beträgt die Abweichung mehr als 1, so sei die Aussage $x \approx a$ falsch. Für welche Werte von x ist die Aussageform $x^2 \approx 0 \Rightarrow x \approx 1$ eine wahre Aussage?

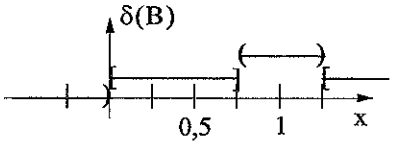
Lösung 234: Nach Luksiewicz gilt für den Wahrheitswert der Implikation:

$$\delta(A \Rightarrow B) = \min(1, 1 + \delta(B) - \delta(A))$$

$\Rightarrow$ Die Aussageform $x^2 \approx 0 \Rightarrow x \approx 1$ wird zur wahren Aussage, wenn der Wahrheitswert 1 wird. Dies ist an jenen Stellen der Fall, bei denen $\delta(A) \leq \delta(B)$, wobei $\delta(A)$ und $\delta(B)$ die Wahrheitsfunktionen gemäss der in der Aufgabe angegebenen Definition von der Relation „≈" darstellen.



Die Wahrheitsfunktion f(x) von $x^2 \approx 0$ ist gerade. Ihr Graph ist in der nebenstehenden ersten Graphik und der Graph der Wahrheitsfunktion g(x) von $x \approx 1$ ist in der zweiten Graphik dargestellt.



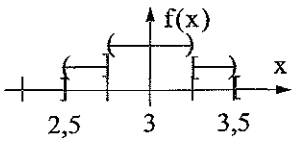
$\Rightarrow$ Wie aus der Graphik erkennbar ist, nimmt die Aussageform den Wahrheitswert wahr an, wenn $x \leq -1 \vee 0{,}5 \leq x$.

Aufgabe 235: Sei in einer dreiwertigen Logik die Aussage „x ist nahe bei a" wahr, wenn x weniger als ein Viertel von a abweicht und ist die Abweichung 0,5 und mehr, so ist die Aussage „x ist nahe bei a" falsch. Wann ist die folgende Aussage nicht richtig?
„Ist x nahe bei 3 oder nahe bei 4, so ist x nahe bei 3,5."

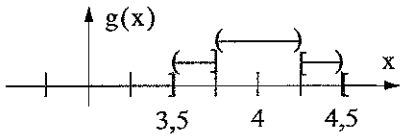
Lösung 235: Es handelt sich um eine Implikation, welche dann nicht richtig ist, wenn der Wahrheitswert der Prämisse grösser ist als der Behauptung. Da es sich um eine dreiwertige Logik handelt kommen nur die folgenden Wahrheitsfunktionen zum Tragen:

© 2000 Verlag ad-librum

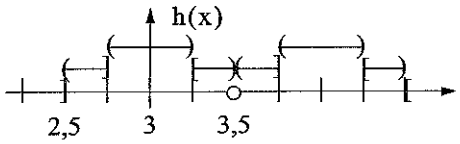
„x ist nahe bei 3“



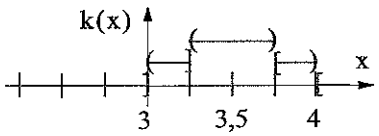
„x ist nahe bei 4“



„x ist nahe bei 3 oder bei 4“



„x ist nahe bei 3,5“



„Ist x nahe bei 3 oder nahe bei 4, so ist x nahe bei 3,5.“
$2{,}5 \le x \le 3.25 \vee 3{,}75 \le x \le 4{,}5$

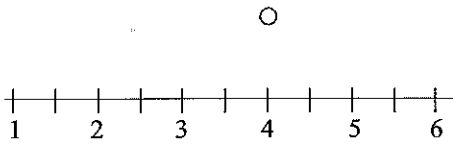
Aufgabe 236: Ein Dozent A schildert anlässlich eines Konventes seine Notengebung: Wenn ein Student etwa eine 3,5 im Mittel hat, so gebe ich ihm eine 4 als Zeugnisnote.
Der Dozent B erwidert A und fragt: Wenn somit ein Student bei Dir eine Zeugnisnote 4 hat, so liegt das Mittel seiner Leistung etwa bei 3,5.

a) Sizzieren Sie die Wahrheitskurven der beiden Aussagen.

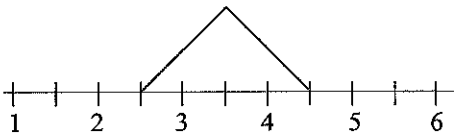
b) Diskutieren Sie die beiden Kurven, indem Sie folgende Fragen beantworten
1. Sind die beiden Dozenten gleicher Meinung oder worin liegt allenfalls der Unterschied?
2. Interpretieren Sie die Wahheitswerte der Aussage von A.
3. Interpretieren Sie die Wahheitswerte der Aussage von B.

Lösung 236: Die Aussagen der beiden Dozenten unterscheiden sich bereits in der logischen Struktur:
A: $x \approx 3{,}5 \Rightarrow x = 4$
B: $x = 4 \Rightarrow x \approx 3{,}5$

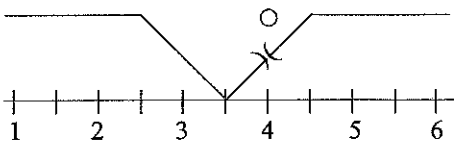
a) Prämisse und Behauptung dürfen nicht unbesehen miteinander vertauscht werden. Es gilt:
$\delta(x \approx 3{,}5 \Rightarrow x = 4) = \min(1, 1 - \delta(x \approx 3{,}5) + \delta(x = 4))$
$\delta(x = 4 \Rightarrow x \approx 3{,}5) = \min(1, 1 - \delta(x = 4) + \delta(x \approx 3{,}5))$
Die Wahrheitswerte können graphisch dargestellt werden, wobei nicht zum Voraus der Wahrheitsgehalt der unscharfen Aussage $x \approx 3{,}5$ feststeht, wehalb ein eigenes Modell gewählt werden kann:
$\delta(x = 4)$



Definition: $\delta(x \approx 3{,}5)$



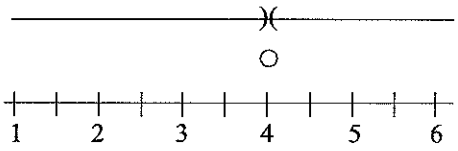
Wahrheitswerte der Aussage von A:
$\delta(x \approx 3{,}5 \Rightarrow x = 4)$
$= \min(1, 1 - \delta(x \approx 3{,}5) + \delta(x = 4))$



Wahrheitswerte der Aussage von B:

$\delta(x = 4 \Rightarrow x \approx 3{,}5)$

$= \min(1, 1 - \delta(x = 4) + \delta(x \approx 3{,}5))$



b) Aufgrund der Definition des Wahrheitsgehalts der Aussage $x \approx 3{,}5$ ergibt sich folgende Diskussion:

1. $x < 2{,}5 \vee 4{,}5 < x$:
   Die beiden Aussagen beziehen sich nur auf den komplementären Bereich.
   Deshalb ist der Aussagewert in diesem Bereich 1.
2. $x = 3{,}5$
   A handelt falsch: Wenn Mittel $x = 3{,}5$, dann Note 3,5.

   $x = 4$
   A handelt richtig: Wenn Mittel $x = 4$, dann Note 4

   $2{,}5 < x < 3{,}5 \vee 3{,}5 < x$
   Der Wahrheitwert nimmt gegen 1 zu.
3. $x \neq 4$
   Wegen der Prämisse, beschränkt sich die Ausssage von B nur auf den Fall $x = 4$.
   Deshalb ist der Aussagewert in diesem Bereich 1.

   $x = 4$
   Die Aussage von B ist weder falsch noch richtig, weiss doch B nicht, was A unter $x \approx 3{,}5$ versteht. Die Aussage von B ist richtig, falls die Bandbreite von $x \approx 3{,}5$ weniger als 0,5 ist.

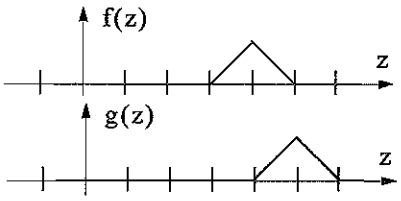
Aufgabe 237: Skizzieren Sie möglichst genau die Graphen der Wahrheitsfunktionen, welche zu den folgenden Aussagen gehören, wobei A und B Aussagen mit der entsprechenden Wahrheitsfunktionen f(z) und g(z) sind:

A: Die Zahl z ist nahe bei 4.

B: Die Zahl z ist nahe bei 5.

a) $A \Rightarrow \neg B$

b) $\neg(B \Rightarrow A)$



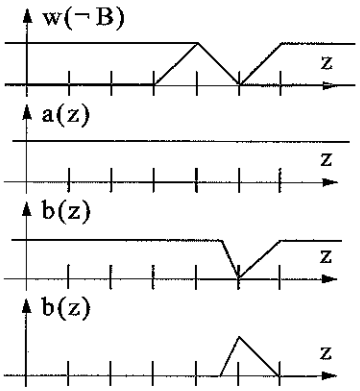
Lösung 237: In der Fuzzy-Logik gilt die Lukasiewicz-Implikation:

a) $\neg B$: z ist nicht nahe bei 5

$a(z) = \min(1, 1 + 1 - g(z) - f(z)) = \min(1, 2 - g(z) - f(z))$

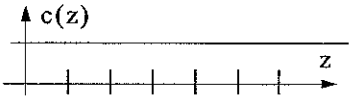
b) $B \Rightarrow A$: $\min(1, 1 + f(z) - g(z))$

$b(z) = 1 - \min(1, 1 + f(z) - g(z))$



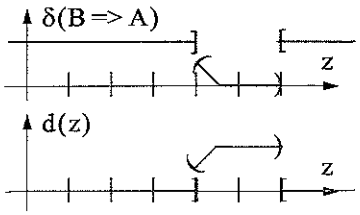
Mit der Gödel-Implikation sehen die Wahrheitsfunktionen wie folgt aus:

a) Da $f(z) \leq 1 - g(z) \wedge c(z) = \begin{cases} 1, \text{ falls } f(z) < 1 - g(z) \\ g(z), \text{ sonst} \end{cases}$



© 2000 Verlag ad-librum

b) $B \Rightarrow A$: $c(z) = \begin{cases} 1, \text{ falls } g(z) < f(z) \\ f(z), \text{ sonst} \end{cases}$



Aufgabe 238: Geben Sie den x-Bereich an, in welchem die folgende Ungleichung Gültigkeit hat: $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \le 3$

Lösung 238: Fall 1: $\frac{x+2}{x-1} \ge 0$ d.h. $\begin{cases} x > 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} \le 3 \Rightarrow x \ge \frac{5}{2} \\ \text{oder} \\ x \le -2 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} \le 3 \Rightarrow x \le \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x \le -2 \vee \frac{5}{2} \le x$

Fall 2: $\frac{x+2}{x-1} \le 0$ d.h. $-2 \le x < 1 \Rightarrow -\frac{x+2}{x-1} \le 3 \Rightarrow 4x \le 1 \Rightarrow -2 \le x \le \frac{1}{4}$

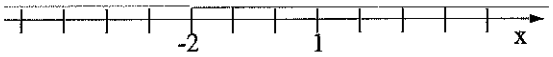
Zusammengefasst: $x \le \frac{1}{4} \vee \frac{5}{2} \le x$

oder:

$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \le 3 \Rightarrow |x+2| \le 3|x-1|$

Die reellen Zahlen werden in drei Gebiete aufgeteilt:

$x \ge 1 \quad \Rightarrow x+2 \le 3(x-1) \Rightarrow x \ge \frac{5}{2}$



$-2 \le x \le 1 \Rightarrow x+2 \le -3(x-1) \Rightarrow x \le \frac{1}{4} \Rightarrow -2 \le$

$x \le \frac{1}{4}$

$x \le -2 \quad \Rightarrow -(x+2) \le -3(x-1) \Rightarrow x \le \frac{5}{2} \Rightarrow x \le -2$

Also ist $x \le \frac{1}{4} \vee \frac{5}{2} \le x$

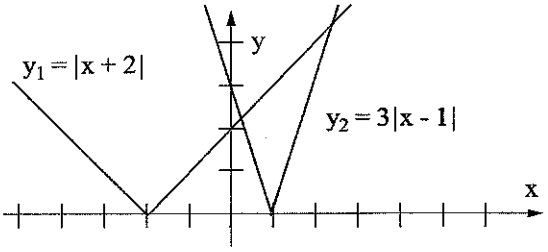
oder:

$|x+2| \le 3|x-1|$

Betrachtet man die beiden Funktionen $y_1 = |x+2|$ und $y_2 = 3|x-1|$, so gilt:

$x+2 \le -3(x-1) \Rightarrow x \le \frac{1}{4}$

$x+2 \le 3(x-1) \Rightarrow x \ge \frac{5}{2}$

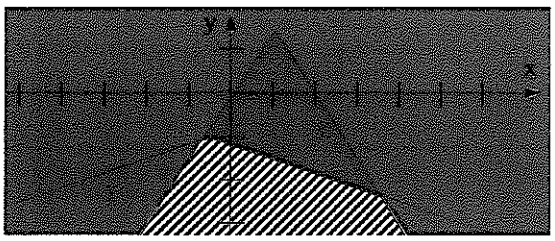


Aufgabe 239: Skizzieren Sie das Gebiet, welches durch die folgenden Ungleichungen beschrieben wird:

$$\left| \begin{array}{l} y \le \frac{3}{2} - \frac{3}{2}|x-1| \\ y \le -\frac{1}{3}\left|x+\frac{1}{2}\right| - 1 \end{array} \right|$$

Lösung 239: Es können die Ungleichungen einzel betrachtet werden. Dabei werden die ungeeigneten Gebiete weggestrichen.

$$\left| \begin{array}{l} y \le \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\,|x-1| \\ y \le -\frac{1}{3}\left|x+\frac{1}{2}\right| - 1 \end{array} \right|$$

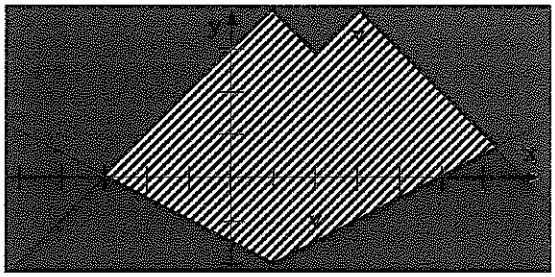


Aufgabe 240: Schraffieren Sie das Gebiet, welches durch die folgenden Ungleichungen beschrieben wird:

$$\left| \begin{array}{l} y \le 4 - |1 - |x-2|| \\ y \ge \left|\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| - 2 \end{array} \right|$$

Lösung 240: Es können die Ungleichungen einzel betrachtet werden. Dabei werden die ungeeigneten Gebiete weggestrichen.

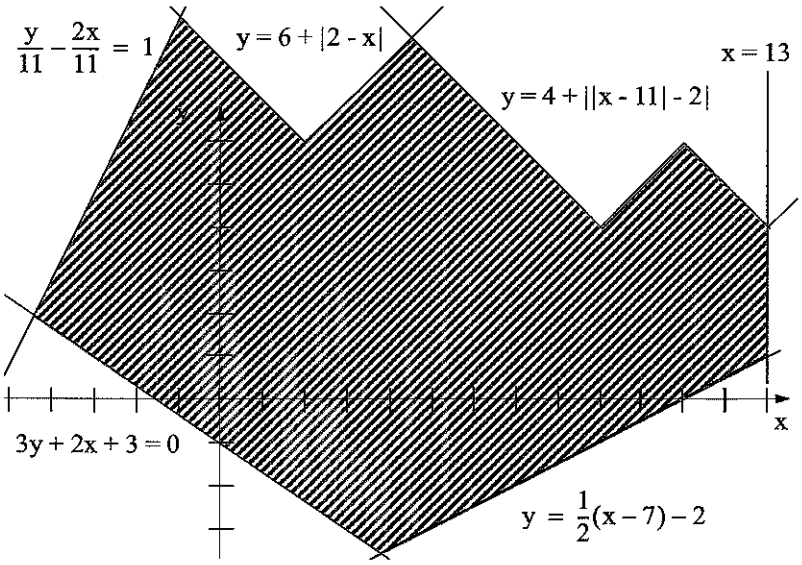
$$\left| \begin{array}{l} y \le 4 - |1 - |x-2|| \\ y \ge \left|\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| - 2 \end{array} \right|$$



Aufgabe 241: Schraffieren Sie das Gebiet, welches durch die folgenden Ungleichungen beschrieben wird:

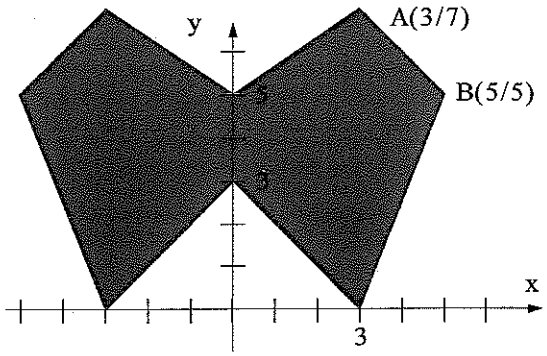
$$\left| \begin{array}{rcl} -\frac{2x}{11} + \frac{y}{11} & \le & 1 \\ |2-x| + 6 & \ge & y \\ 3 + 2x + 3y & \ge & 0 \\ x & \le & 13 \\ 4 + ||x-11| - 2| & \ge & y \\ \frac{1}{2}(x-7) - 2 & \le & y \end{array} \right|$$

Lösung 241: Es können die Ungleichungen einzel betrachtet werden. Dabei werden die ungeeigneten Gebiete weggestrichen.



© 2000 Verlag ad-librum

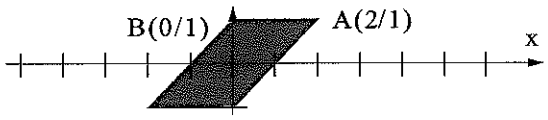
Aufgabe 242: Beschreiben Sie das markierte Gebiet mit einem Ungleichungssystem. Die Fläche ist symmetrisch bezüglich der y - Achse.



Lösung 242: Es gilt:

$$\left|\begin{array}{l} y \le \frac{2}{3}|x| + 5 \\ y \le -|x| + 10 \\ y \ge -|x| + 3 \\ y \ge \frac{5}{2}|x| - \frac{15}{2} \end{array}\right|$$

Aufgabe 243: Beschreiben Sie das schraffierte Gebiet, welches punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist, durch ein Ungleichungssystem.



Lösung 243: Es ist nicht klar, ob die Grenzen des Gebietes dazugehören oder nicht. Da dies für die Lösungsidee bis auf das Gleichheitszeichen keine Unterschiede ergibt, wird lediglich davon ausgegangen, dass die Grenzen an jeder Stelle dazugehören.

$$\left|\begin{array}{l} y \le 1 \\ y \ge -1 \\ y \ge x - 1 \\ y \le x + 1 \end{array}\right| \quad \text{oder:} \quad \left|\begin{array}{l} |y| \le 1 \\ -y \le -x + 1 \\ y \le x + 1 \end{array}\right|$$

Aufgabe 244: Jemand besitzt Fr. 230.- in Ein-, Zwei-, und Fünffrankenstücken. Zusammen sind es hundert Münzen, wobei das Verhältnis der Zweifrankenstücke zu den Einfrankenstücken 2:3 ist. Wieviele Münzen hat es von jeder Art?

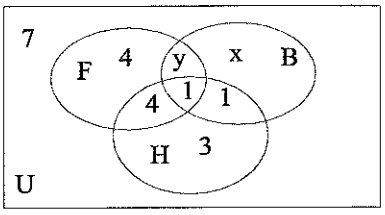
Lösung 244: x: Anzahl Einfrankenstücke
y: Anzahl Zweifrankenstücke
z: Anzahl Fünffrankenstücke

$$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x + 2y + 5z = 230 \\ 3y = 2x \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} 5x + 3z = 300 \\ 7x + 15z = 690 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow x = 45;\ y = 30;\ z = 25$

Aufgabe 245: In einer Klasse spielt ein Viertel aller Studenten Basketball. 7 betreiben gar keinen Sport, 9 spielen Handball und 4 spielen nur Fussball. Jeder zweite Student spielt Fussball. 2 spielen Handball und Basketball. Ein Student spielt alle 3 Spiele. 5 Studenten spielen Handball und Fussball. Wieviele spielen nur Basketball?

Lösung 245: Die Angaben lassen sich als Mengen dargestellen und es bleiben nur zwei Teilmengen offen:



$$\left|\begin{array}{l} -x + y + 18 = 20 \\ 3x + 3y + 8 = 20 \end{array}\right|$$

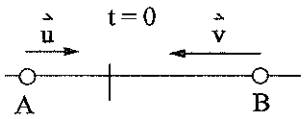
$\Rightarrow x = 1,\ y = 3$

Aufgabe 246: Ein Zug fährt an einem Ort in östlicher Richtung mit einer Geschwindigkeit u = 40 km/h vorbei. Nach t = 10 Min. fährt ein zweiter in westlicher Richtung mit der Geschwindigkeit v = 60 km/h an

© 2000 Verlag ad-librum

demselben Ort vorbei. Wann und wo haben sich die beiden Züge gekreuzt?

Lösung 246: Im Moment, wo A den Ort passiert, ist B noch vt = 10 km davon entfernt. Der Treffpunkt teilt diese Strecke im Verhältnis der Geschwindigkeiten von A und B. Dieser ist somit 4 km in östlicher Richtung vom Beobachtungsort entfernt. Dazu braucht A 6 Min. Fahrzeit.

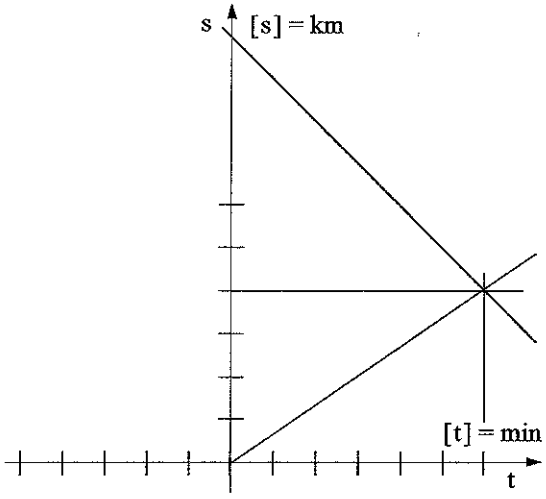


oder:

Aus dem graphischen Fahrplan folgt: Die Geschwindigkeiten sind die Steigungen der Wegkurven.
Der Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmt Ort und Zeitpunkt des Zusammentreffens.

$$\left| \begin{array}{l} s = ut \\ s = -vt + 60 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{10}\ h$$



Bsp. 247 Welche Werte von x erfüllen die Gleichung $|a - |a - x|| = a$?

Lösung 247: $a = |a - |a - x|| \geq 0 \Rightarrow$ Bedingung: $a \geq 0$
$\Rightarrow a - |a - x| \geq 0 \Rightarrow a - |a - x| = a \Rightarrow -|a - x| = 0 \Rightarrow x = a$

$$\Rightarrow a - |a - x| \leq 0 \Rightarrow -a + |a - x| = a \Rightarrow |a - x| = 2a \Rightarrow \begin{cases} a - x = 2a \Rightarrow x = -a \\ -a + x = 2a \Rightarrow x = 3a \end{cases}$$

Aufgabe 248: Bestimmen Sie die gewünschten Unbekannten in den folgenden Gleichungen:

a) $(2 + t)(3 - t) - (3 + t)(2 - t) = 2t - 9 \Rightarrow t = ?$

b) $\frac{1}{k-2} = 1 - \frac{1}{2-k} \Rightarrow k = ?$

c) $\frac{2}{m^2 - 2m} = \frac{5}{6 - 3m} + \frac{7}{9m} \Rightarrow m = ?$

d) $ab\left(\frac{a}{2} - x\right) = b\frac{h}{2}\left[x - \left(a + \frac{h}{3}\right)\right] \Rightarrow x = ?$

Lösung 248: a) $(2 + t)(3 - t) - (3 + t)(2 - t) = 2t - 9 \Leftrightarrow 2t = 2t - 9 \Rightarrow 0 = -9 \Rightarrow$ Widerspruch!
$\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung.

b) $\frac{1}{k-2} = 1 - \frac{1}{2-k} = \frac{k-1}{k-2} \Rightarrow k = 2$, falls $k \neq 2 \Rightarrow$ Widerspruch
$\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung.

c) $\frac{2}{m^2 - 2m} = \frac{5}{6 - 3m} + \frac{7}{9m} = \frac{7(m-2) - 15m}{9m(m-2)}$
$18 = -8m - 14 \Rightarrow m = -4$

© 2000 Verlag ad-librum

d) $ab\left(\frac{a}{2}-x\right) = b\frac{h}{2}\left[x-\left(a+\frac{h}{3}\right)\right] \Rightarrow 3bx(h+2a) = b(3a^2+3ha+h^2)$

$\Rightarrow x = \frac{3a^2+3ha+h^2}{3(h+2a)}$, falls $b \neq 0, h \neq -2a$

Falls $b = 0 \Rightarrow$ ursprüngliche Gleichung: $ab\left(\frac{a}{2}-x\right) = 0 = b\frac{h}{2}\left[x-\left(a+\frac{h}{3}\right)\right] \Rightarrow$ x beliebig reell

Falls $b \neq 0$ und $h = -2a \Rightarrow$ ursprüngliche Gleichung: $ab\left(\frac{a}{2}-x\right) = -ba\left[x-\left(a-\frac{2a}{3}\right)\right]$

falls $a \neq 0$: $\Rightarrow$ ursprüngliche Gleichung: $\frac{a}{2}-x = -\left[x-\left(a-\frac{2a}{3}\right)\right] = a-\frac{2a}{3}-x$

$\Rightarrow \frac{a}{2} = a-\frac{2a}{3} \Rightarrow \frac{a}{2}+\frac{2a}{3} = 0 \Rightarrow$ Widerspruch

falls $a = 0$: $\Rightarrow$ ursprüngliche Gleichung: $ab\left(\frac{a}{2}-x\right) = -ba\left[x-\left(a-\frac{2a}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow$ x beliebig reell

$$\Rightarrow \begin{cases} x \text{ beliebig, falls } a = 0 = h \\ \frac{3a^2+3ha+h^2}{3(h+2a)}, \text{ falls } b \neq 0, h \neq -2a \\ \text{keine Lösung, falls } a \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 249: Berechnen Sie x und diskutieren Sie die Lösungen:

a) $\frac{35x}{15x+5} - \frac{2x}{6x+2} + \frac{2}{3x+1} = 2$

b) $\frac{2x-a}{b} - \frac{b-2x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$

Lösung 249: a) $\frac{35x}{15x+5} - \frac{2x}{6x+2} + \frac{2}{3x+1} = \frac{6x+2}{3x+1} = 2$

Es handelt sich um eine allgemeingültige Aussageform. $\Rightarrow$ x ist beliebig in $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

b) Die Gleichung ist nur unter den folgenden Bedingungen definiert: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

$\frac{2x-a}{b} - \frac{b-2x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} \Rightarrow 2(a+b)x = 2(a^2+b^2)$

$\Rightarrow x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$, falls $a \neq -b \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$

Ist $a = -b \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$, so lautet die Gleichung: $\frac{2x+b}{b} + \frac{b-2x}{b} = -2$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Lösung, da $2 \neq -2$.
Sonst ist die Gleichung nicht definiert.

Aufgabe 250: Lösen Sie die folgenden Gleichungen und vereinfachen Sie das Resultat :

a) $\frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} - 1 = abc - x(a+b+c)$

b) $a^2b - \frac{a+x}{b} = ab^2 - \frac{b+x}{a}$

c) $a + b + \frac{x}{a+b} = a - b + \frac{x}{a-b}$

Lösung 250: a) Die Gleichung $\frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} - 1 = abc - x(a+b+c)$ ist nur unter der Bedingung $abc \neq 0$ definiert.

Sortieren und multiplizieren ergibt: $x(c + a + b + (a+b+c)abc) = (abc+1)abc$

$x(a+b+c)(abc+1) = abc(abc+1)$

$\Rightarrow x = \frac{abc}{a+b+c}$, falls $a+b+c \neq 0 \wedge abc \neq -1$.

Falls $a+b+c = 0 \wedge abc \neq -1 \Rightarrow$ keine Lösung.

Falls $a+b+c = 0 \wedge abc = -1 \Rightarrow x$ ist beliebig.

b) Die Gleichung $a^2b - \frac{a+x}{b} = ab^2 - \frac{b+x}{a}$ ist nur unter der Bedingung $ab \neq 0$ definiert.

$\Rightarrow x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = ab(b-a) + \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \Rightarrow x\frac{b-a}{ab} = \frac{a^2b^2(b-a)}{ab} + \frac{a^2-b^2}{ab}$

Falls $a \neq b \Rightarrow x = a^2b^2 - a - b$, falls $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Wenn $a = b \wedge b \neq 0$ ist, ändert sich die Gleichung zu einer Identität. Also ist $x \in \mathbb{R}$.

Sonst ist die Gleichung nicht definiert.

c) Die Gleichung $a + b + \frac{x}{a+b} = a - b + \frac{x}{a-b}$ ist nur unter den folgenden Voraussetzungen definiert:

$a \neq b \wedge a \neq -b$

Mit der Substitution $a + b = p$ und $a - b = q$ ergibt sich die vereinfachte Gleichung

$p + \frac{x}{p} = q + \frac{x}{q} \Rightarrow x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = q - p$,

Falls $p \neq q$, d.h. $a + b \neq a - b \Rightarrow x = pq = a^2 - b^2$, wenn $b \neq 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq -b$.

Falls $p = q$, d.h. $b = 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq -b \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

Sonst ist die Gleichung nicht definiert.

Aufgabe 251: Bestimmen Sie x in den folgenden Gleichungen:

a) $\frac{x-2}{x+a^2-b^2} - 2 = \frac{2-x}{x-a^2+b^2}$

b) $(x+a)^2 - b(x+a-c) = bc$

Lösung 251: a) Die Gleichung $\frac{x-2}{x+a^2-b^2} - 2 = \frac{2-x}{x-a^2+b^2}$ ist nur unter der Bedingung $x \neq \pm\ (b^2 - a^2)$ definiert.

$(x-2)\left(\frac{1}{x+a^2-b^2} + \frac{1}{x-a^2+b^2}\right) = 2 \Leftrightarrow (x-2)\,2x = 2(x^2 - (a^2-b^2)^2) \Leftrightarrow 2x = (a^2-b^2)^2$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2$

Aus der anfänglich gestellten Forderung folgen die Bedingungen für a und b.

$x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)^2 \neq \pm\ (b^2 - a^2) \Rightarrow (b^2 - a^2)(a^2 - b^2 \pm 2) \neq 0 \Rightarrow |a| \neq |b| \vee b^2 - a^2 \neq \pm 2$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2$, falls $|a| \neq |b| \vee b^2 - a^2 \neq \pm 2$

Sonst ist die Gleichung nicht definiert.

© 2000 Verlag ad-librum

b) $x^2 + x(2a - b) + a^2 - ba = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{2a-b}{2}\right)^2 = ba - a^2 + \left(\frac{2a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}b^2 \Rightarrow x_1 = -a, x_2 = b - a$

Aufgabe 252: Berechnen Sie x und diskutieren Sie die Lösung:

a) $(x + a - b)^2 - (x + b)^2 = (x + a)(a - 2b)$

b) $(x + a - b)^2 - (x + b)^2 = (x + a)(a - 3b)$

c) $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2x}{ab}$

Lösung 252: a) $(x + a - b)^2 - (x + b)^2 = (2x + a)(a - 2b) = (x + a)(a - 2b)$
$x = 0$, falls $a \neq 2b$
$x \in \mathbb{R}$, falls $a = 2b$

b) $(x + a - b)^2 - (x + b)^2 = (2x + a)(a - 2b) = (x + a)(a - 3b)$
$2x(a - 2b) - x(a - 3b) = a(a - 3b) - a(a - 2b) \Rightarrow x = \frac{ab}{b-a}$, falls $a \neq b$.
Ist $a = b$, so lautet die Gleichung: $x^2 - (x + a)^2 = -2a(x + a) \Rightarrow a^2 = 2a^2$
$\Rightarrow$ Ist $a = b = 0$, so ist x bliebig in $\mathbb{R}$.
Ist $a = b \neq 0$, so gibt es keine Lösung.

c) Die Gleichung $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2x}{ab}$ ist nur unter den Bedingung $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b$ definiert.
$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{(a+b)^2}{ab}\right)x = -\frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \frac{2ab}{ab}x = \frac{2ab}{a+b}$
$\Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$, falls $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b$
Sonst ist die Gleichung nicht definiert.

Aufgabe 253: a) Berechnen Sie x: $\frac{9x}{20m} + \frac{x}{20} - 1 = \frac{x(m+9)}{20} - m$

b) Wie gross ist m zu wählen, damit x den Wert 5 erhält?

Lösung 253: a) Die Gleichung $\frac{9x}{20m} + \frac{x}{20} - 1 = \frac{x(m+9)}{20} - m$ ist nur unter der Bedingung $m \neq 0$ definiert.
$x\left(\frac{9}{20m} + \frac{1}{20} - \frac{(m+9)}{20}\right) = 1 - m = x\left(\frac{9 + m - m(m+9)}{20m}\right) \Rightarrow x(9 + m)(1 - m) = 20m(1 - m)$
$\Rightarrow x = \frac{20m}{9+m}$, falls $m \neq -9 \wedge m \neq 1 \wedge m \neq 0$
Ist $m = -9$, so lautet die ursprüngliche Gleichung: $-\frac{9x}{20 \cdot 9} + \frac{x}{20} - 1 = 9 \Rightarrow$ Es gibt keine Lösung.
Ist $m = 1$, so lautet die ursprüngliche Gleichung: $\frac{9x}{20} + \frac{x}{20} - 1 = \frac{10x}{20} - 1 \Rightarrow$ x ist beliebig in $\mathbb{R}$.

Zusammengefasst gilt: $x \in \begin{cases} \left\{\frac{20m}{9+m}\right\}, \text{ falls } m \neq 0 \wedge m \neq 1 \wedge m \neq -9 \\ \phi, \text{ falls } m = -9 \\ \mathbb{R}, \text{ falls } m = 1 \end{cases}$

b) Aufgrund der Resultate von a) folgt:

1. $5 = \frac{20m}{9+m} \Rightarrow m = 3$
2. Da $5 \in \mathbb{R}$, ist auch $m = 1$.

oder:

In der ursprünglichen Gleichung eingesetzt: $\frac{9 \cdot 5}{20m} + \frac{5}{20} - 1 = \frac{5(m+9)}{20} - m$

$\Rightarrow 45 - 15m = -15m^2 + 45m$, falls $m \neq 0 \Rightarrow 3 - m = -m^2 + 3m = m(3 - m)$, falls $m \neq 0$
$\Rightarrow m = 3; m = 1$

Aufgabe 254: Bestimmen Sie x in den folgenden Gleichungen:

a) $\frac{x-1}{x+a-b} = \frac{1-x}{x-a+b} + 2$

b) $\frac{x+a}{(x-a)(x-b)} - \frac{x+b}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{x^2-ab}$

Lösung 254: a) Die Gleichung $\frac{x-1}{x+a-b} = \frac{1-x}{x-a+b} + 2$ ist nur unter der folgenden Bedingung definiert: $x \neq |b - a|$

$\frac{x-1}{x+a-b} + \frac{x-1}{x-a+b} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{x+a-b} + \frac{1}{x-a+b}\right)(x-1) = 2 \Rightarrow x(x-1) = x^2 - (b-a)^2$

$\Rightarrow x = (b-a)^2$, falls $x \neq |b - a|$
Sonst ist die Gleichung nicht definiert.

b) Die Gleichung $\frac{x+a}{(x-a)(x-b)} - \frac{x+b}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{x^2-ab}$ ist nur unter den folgenden Bedingungen definiert: $x \neq a \wedge x \neq b \wedge x \neq \pm\sqrt{ab} \wedge ab \geq 0$

$\frac{x+a}{(x-a)(x-b)} - \frac{x+b}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{x^2-ab} \Rightarrow \frac{a-b}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{x^2-ab}$

Ist $a \neq b \Rightarrow (x-a)(x-b) = x^2 - ab \Rightarrow x = \frac{2ab}{a+b}$, falls $a \neq -b$, was nach $ab \geq 0$ erfüllt ist.

Es ist nun noch zu prüfen, ob die Lösung mit den Bedingungen kollidiert:

$$\frac{2ab}{a+b} \neq \begin{cases} a \Rightarrow \begin{cases} \text{falls } a \neq 0 \Rightarrow b \neq a, \text{ was Voraussetzung ist} \\ \text{falls } a = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ was der Voraussetzung } x \neq a \text{ widerspricht} \end{cases} \\ b \quad \text{analog wie vorangehend, da } x = \frac{2ab}{a+b} \text{ symmetrisch in a und b} \\ \pm\sqrt{ab} \Rightarrow \begin{cases} \text{falls } ab \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 \wedge a \neq 0 \Rightarrow 4ab \neq (a+b)^2 \Rightarrow b \neq a \\ \text{falls } ab = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ was der Bedingung } x \neq a \text{ widerspricht} \end{cases} \end{cases}$$

Ist $a = b$, so lautet die ursprüngliche Gleichung:

$\frac{x+a}{(x-a)^2} - \frac{x+a}{(x-a)^2} = \frac{0}{x^2-a^2} \Rightarrow$ x ist beliebig in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\text{Zusammengefasst gilt: } x \in \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{a\}, \text{ falls } a = b \wedge ab \geq 0 \\ \left\{\frac{2ab}{a+b}\right\}, \text{ falls } a \neq b \wedge a \neq -b \wedge ab > 0 \end{cases}$$

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 255: Bestimmen Sie x in den folgende Gleichungen und diskutieren Sie die Lösung:

a) $\dfrac{1}{\dfrac{3(m+n)^2}{p^2x}-\dfrac{m+n}{p}}=\dfrac{p}{2(m+n)}$

b) $\dfrac{a+b}{c^2}x+c-\dfrac{b-c}{a-b}x-\dfrac{a-d}{c}=\dfrac{a+c}{a-b}x-\dfrac{b-d}{c}$

Lösung 255: a) $\dfrac{1}{\dfrac{3(m+n)^2}{p^2x}-\dfrac{m+n}{p}}=\dfrac{p}{2(m+n)}=\dfrac{p^2x}{(3(m+n)-px)(m+n)} \Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{px}{(3(m+n)-px)}$

$\Rightarrow \dfrac{3(m+n)}{px}=3 \Rightarrow x=\dfrac{m+n}{p}$ falls $p\neq 0$ und $m+n\neq 0$.

Sonst ist die Gleichung nicht definiert.

b) Die Gleichung $\dfrac{a+b}{c^2}x+c-\dfrac{b-c}{a-b}x-\dfrac{a-d}{c}=\dfrac{a+c}{a-b}x-\dfrac{b-d}{c}$ ist nur unter den folgenden Bedingungen definiert: $a\neq b \wedge c\neq 0$

$\dfrac{a+b}{c^2}x-\dfrac{b-c}{a-b}x-\dfrac{a+c}{a-b}x=\dfrac{a-d}{c}-\dfrac{b-d}{c}-c$

$\Rightarrow x\left(\dfrac{a+b}{c^2}-\dfrac{b-c}{a-b}-\dfrac{a+c}{a-b}\right)=x\left(\dfrac{a+b}{c^2}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)=\dfrac{a-b-c^2}{c}$

$\Rightarrow x=\dfrac{c(a-b)}{a+b}$, falls $a\neq -b \wedge (a\neq b \wedge c\neq 0)$

Ist $a=-b$ und $a\neq b \wedge c\neq 0$, so lautet die Gleichung: $c+\dfrac{a+c}{2a}x-\dfrac{a-d}{c}=\dfrac{a+c}{2a}x+\dfrac{a+d}{c}$

Es ist x beliebig in $\mathbb{R}$, wenn $c-\dfrac{a-d}{c}=\dfrac{a+d}{c}$ d.h. wenn $c^2=2a$

Ist $c^2\neq 2a$, so gibt es keine Lösung.

oder:

$x\left(\dfrac{a+b}{c^2}-\dfrac{b-c}{a-b}-\dfrac{a+c}{a-b}\right)=\dfrac{a-b}{c}-c \Rightarrow x(a+b)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a-b}\right)=\dfrac{a-b-c^2}{c}$

$\Rightarrow x=\dfrac{c(a-b)}{a+b}$, falls $c\neq 0$ und $a\neq b$, und da beim Umformen eine Division durchgeführt werden muss, gilt auch $a+b\neq 0$ und $a-b-c^2\neq 0$.

Falls $a+b=0$ und $a-b-c^2\neq 0$, stellt die Gleichung einen Widerspruch dar und hat somit keine Lösung.

Falls $a+b=0$ und $a-b-c^2=0$ oder $a+b\neq 0$ und $a-b-c^2=0$, so ist jedes x in $\mathbb{R}$ eine Lösung.

Aufgabe 256: Lösen Sie die folgende Gleichung:

$\dfrac{(5a-3c)x}{2a^2}+2a-\dfrac{3ax}{3a-2c}-\dfrac{6a-5n}{2a}=\dfrac{5n-4c}{2a}-\dfrac{(3c-2a)x}{3a-2c}$

Lösung 256: Die Gleichung $\dfrac{(5a-3c)x}{2a^2}+2a-\dfrac{3ax}{3a-2c}-\dfrac{6a-5n}{2a}=\dfrac{5n-4c}{2a}-\dfrac{(3c-2a)x}{3a-2c}$ ist nur unter den folgenden Voraussetzungen definiert: $a\neq 0$, $a\neq \dfrac{2c}{3}$

$\dfrac{(5a-3c)x}{2a^2}-\dfrac{3ax}{3a-2c}+\dfrac{(3c-2a)x}{3a-2c}=\dfrac{5n-4c}{2a}-2a+\dfrac{6a-5n}{2a}$

© 2000 Verlag ad-librum

$$\Rightarrow x\frac{(5a-3c)(3a-2c-2a^2)}{2a^2(3a-2c)} = \frac{3a-2c-2a^2}{a}$$

Falls $3a - 2a^2 - 2c \neq 0$

$$\Rightarrow x\frac{(5a-3c)}{2a^2(3a-2c)} = \frac{1}{a} \Rightarrow x \in \begin{cases} \left\{\frac{2a(3a-2c)}{5a-3c}\right\}, \text{ falls } a \neq \frac{3c}{5} \wedge \left(a \neq 0 \wedge a \neq \frac{2c}{3}\right) \\ \phi, \text{ falls } a = \frac{3c}{5} \wedge \left(a \neq 0 \wedge a \neq \frac{2c}{3}\right) \end{cases}$$

Falls $3a - 2a^2 - 2c = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$, wenn $a \neq 0 \wedge a \neq \frac{2c}{3}$

Aufgabe 257: Diskutieren Sie das Gleichungssystem in den Variablen x und y:

$$\left|\begin{array}{l} (r+s)x - 2y = 2rs \\ r^2 - x(r+s) + s^2 = 2y \end{array}\right|$$

Lösung 257: Geordnet nach den Variablen:

$$\left|\begin{array}{l} (r+s)x - 2y = 2rs \\ r^2 - x(r+s) + s^2 = 2y \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} (r+s)x - 2y = 2rs \\ (r+s)x + 2y = r^2 + s^2 \end{array}\right|$$

$x = \frac{1}{2}(r+s)$, falls $r \neq -s$, $y = \frac{1}{4}(r-s)^2$

Falls $r = -s$, so lautet das Gleichungssystem: $y = r^2$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 258: a) Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

$$\left|\begin{array}{l} ax - y = 2a \\ y + az = a^2 \\ -x + az = a \end{array}\right|$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem

Lösung 258: a) Entscheidend ist die Hauptdeterminante des Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{l} ax - y = 2a \\ y + az = a^2 \\ -x + az = a \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 + a$$

Es gibt genau eine Lösung, wenn $a \neq 0 \wedge a \neq -1$

$a = 0$: Das Gleichungssystem lautet dann:

$$\left|\begin{array}{l} -y = 0 \\ y = 0 \\ -x = 0 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow x = y = 0;\ z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Lösungen.

© 2000 Verlag ad-librum

$a = -1$: Das Gleichungssystem lautet dann:

$$\left|\begin{array}{rrrr} -x & -\ y & & = -2 \\ & y & -\ z & = 1 \\ -x & & -\ z & = -1 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow$ II - III

$$\left|\begin{array}{rrr} -x & -\ y & = -2 \\ x & +\ y & = 2 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow y = 2 - x;\ z = 1 - x$

$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Lösungen.

Es gibt unendlich viele Lösungen für $a \in \{0, -1\}$

b) $a \neq 0 \wedge a \neq -1$

Durch lineares Kombinieren der Gleichungen (I + II - III): $(a + 1)x = (a + 1)a$

$\Rightarrow x = a$

$z = 2$

$y = a^2 - 2a$

Aufgabe 259: Für welche Werte von a hat das folgende Gleichungssystem eine Lösung?

$$\left|\begin{array}{rrr} 6x + & ay & = a \\ (a-1)y + & 2(a-1)x & = 2 \end{array}\right|$$

Lösung 259: Entscheidend ist die Determinante: $\begin{vmatrix} 6 & a \\ 2(a-1) & a-1 \end{vmatrix} = 6(a-1) - 2a(a-1) = 2(a-1)(3-a)$

Es gibt genau eine Lösung, wenn die Determinante von Null verschieden ist,
d.h. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Durch Einsetzen der ausgeschlossenen Werte von a oder durch Verwendung der Cramerschen Regel ergibt sich: Ist $a = 1$, so existiert keine Lösung.
Ist $a = 3$, so existieren unendlich viele Lösungen.

$\Rightarrow$ Es existiert eine Lösung, wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Aufgabe 260: Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{rrr} (a-1)x + & 2(a-1)y & = 2a \\ ax + & 6y & = a \end{array}\right|$$

a) keine Lösung?

b) genau eine Lösung?

c) ∞ - viele Lösungen?

Lösung 260: Entscheidend ist die Determinante $\begin{vmatrix} a-1 & 2(a-1) \\ a & 6 \end{vmatrix} = 6(a-1) - 2a(a-1)$. Es gibt genau eine Lösung, wenn die Determinante von Null verschieden ist.

a) $a = 1$

b) Determinante: $6(a-1) - 2a(a-1) = 2(a-1)(3-a) \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

c) $a = 3$

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 261: Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} x + ay = a \\ x + a^2y = a^2 \end{array}\right|$$

a) keine Lösung?

b) genau eine Lösung?

c) ∞ - viele Lösungen?

Lösung 261: Entscheidend ist die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a(a-1)$. Es gibt genau eine Lösung, wenn die Determinante von Null verschieden ist.

a) nie

b) Determinante: $a(a-1) \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$

c) $a = 1; a = 0$

Lösung 262: Entscheidend ist die Determinante der Matrix des Gleichungssystems:

$$\left|\begin{array}{l} 4z + x - 3w = 2 \\ 2z + y + w = 1 \\ 8z + 2x + \mu w = \lambda \\ z + 2y - x + 4w = 3 \end{array}\right|$$

Mittels der Linearkombination 2I - III kann das Gleichungssystem vereinfacht werden:

$$\left|\begin{array}{l} -(6+\mu)w = 4 - \lambda \\ 2z + y + w = 1 \\ 8z + 2x + \mu w = \lambda \\ z + 2y - x + 4w = 3 \end{array}\right|$$

Die Determinante der zugehörigen Gleichung ist massgebend: (Entwickelt nach der ersten Zeile)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -(6+\mu) \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 2 & \mu \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2(6+\mu)$$

a) Es gibt genau eine Lösung, falls $\mu \neq -6$

b) Es gibt keine Lösung, falls $\mu = -6$ und $\lambda \neq 4$

c) Es gibt keine Lösung, falls $\mu = -6$ und $\lambda = 4$ (Gleichung I und III sind identisch)

d) Die dritte Gleichung kann vorerst weggelassen werden, da sie identisch mit der ersten ist. Somit liegt ein lineares Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen vor. Dabei kann eine Variable als Parameter dienen: z.B. $w := \rho$. Die Gleichungen sind nun nur noch zu entkoppeln:

$$\left|\begin{array}{l} 4z + x - 3w = 2 \\ 2z + y + w = 1 \\ z + 2y - x + 4w = 3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} z - w = 3 \\ 2z + y + w = 1 \\ z + 2y - x + 4w = 3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} w = \rho \\ x = -10 - \rho \\ y = -5 - 3\rho \\ z = 3 + \rho \end{array}\right|$$

Aufgabe 262: Die Lösungen bilden eine Gerade im 4-dimensionalen Raum.

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 263: Berechnen Sie x und y:

$$\left|\begin{array}{l}(a+b)x = 2(ab+y)\\ bx+2y = a^2-ax+b^2\end{array}\right|$$

Lösung 263: Ordnen der Variablen:

$$\left|\begin{array}{l}(a+b)x - 2y = 2ab\\ (a+b)x + 2y = a^2+b^2\end{array}\right|$$

Falls $a \neq -b \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{(a-b)^2}{4}$

Falls $a = -b = 0 \Rightarrow$ x ist beliebig; $y = 0$, d.h. es gibt ∞ -viele Lösungen.
Falls $a = -b \neq 0 \Rightarrow$ es gibt keine Lösung.

Aufgabe 264: Für welche Werte von a hat das folgende Gleichungssystem keine reelle Lösung?

$$\left|\begin{array}{l}(a-2)x - ay = 5\\ x^2 - y^2 = 0\end{array}\right|$$

Lösung 264: Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l}(a-2)x - ay = 5\\ x^2 - y^2 = 0\end{array}\right|$$

kann durch folgende Gleichungssysteme ersetzt werden:

$$\left|\begin{array}{l}(a-2)x - ay = 5\\ x + y = 0\end{array}\right| \text{ oder: } \left|\begin{array}{l}(a-2)x - ay = 5\\ x - y = 0\end{array}\right|$$

Das zweite hat stets eine reelle Lösung, weil die zugehörige Determinante stets ungleich Null ist, nämlich 2. Es kann somit nur das erste keine Lösung aufweisen, nämlich falls $a = 1$. Das Gleichungssystem lautet dann:

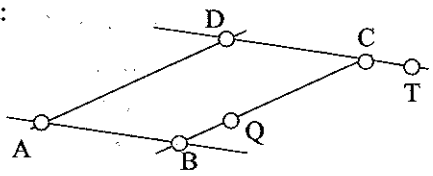
$$\left|\begin{array}{l}-x - y = 5\\ x + y = 0\end{array}\right|$$

Aufgabe 265: Die Punkte A(-5/-2) und D(-1/3) sind Eckpunkte eines Parallelogramms ABCD. Die Seite BC geht durch den Punkt Q(6/3) und die Seite CD durch den Punkt T(2/4). Bestimmen Sie die Gleichungen der Seitengeraden sowie die Koordinaten der Eckpunkte B und C.

Lösung 265: Die Seiten AD ist DT = DC sind gegeben und damit bestimmt:

BC: $y = \frac{5}{4}(x-6)+3$; CD: $y = \frac{1}{3}(x+1)+3$

AB: $y = \frac{1}{3}(x+5)-2$; B $\left(\frac{50}{11}/\frac{13}{11}\right)$, C $\left(\frac{94}{11}/\frac{68}{11}\right)$



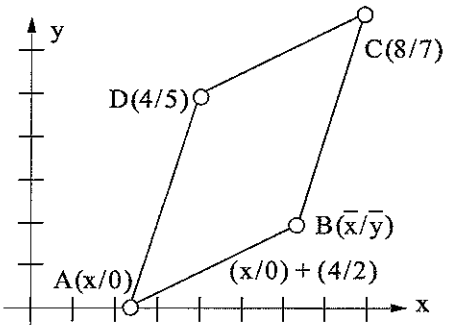
Aufgabe 266: Die Punkte D(4/5) und C(8/7) sind Eckpunkte eines Parallelogramms ABCD. Der Eckpunkt A soll auf der x-Achse liegen. Welches sind die Koordinaten der Eckpunkte A und B, wenn die Fläche des Parallelogramms den Wert 9 hat ?

© 2000 Verlag ad-librum

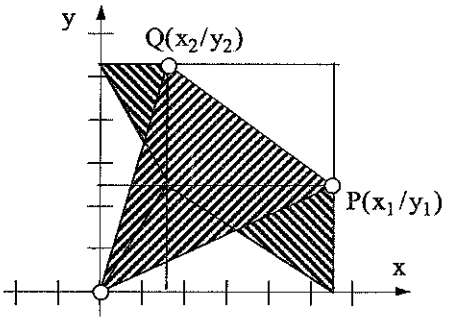
Lösung 266: Die Berechnung erfolgt mit Hilfe von Trapez- und Dreiecksflächen.

$$F = 24 + \frac{9}{2}(x - 4) - 4 - \frac{5}{2}(x - 4) = 9 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

oder:



Jedes Dreieck ist zerlegbar in Teildreiecke, welche der folgenden Situation entsprechen:
Durch Flächenverwandlung (Scherung) folgt allgemein:



$$A_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Beachten Sie, dass bei negativem Umlaufsinn das Vorzeichen der Fläche ändert. Damit lässt sich aber die Fläche eines beliebigen Poligons durch den folgenden Ausdruck berechnen:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1(\bmod n)} & y_{i+1(\bmod n)} \end{vmatrix}$$

Ansatz:

Seien die Ecken $A(x/0)$ und $B(\bar{x}/\bar{y})$

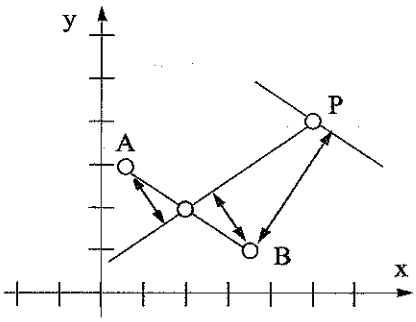
Also ist: $F_{ABCD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & 0 \\ \bar{x} & \bar{y} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ x & 0 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow x\bar{y} + 7\bar{x} - 8\bar{y} + 12 - 5x = 18$

Bedingung ist ferner: $\bar{x} - x = 4$
$\bar{y} - 0 = 2$

$\Rightarrow 2x + 7(x + 4) - 16 + 12 - 5x = 18 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Ist das Parallelogramm im Uhrzeigersinn orientiert, so ist $F_{ABCD} = -9 \Rightarrow x = -\frac{21}{2}$

Aufgabe 267: Bestimmen Sie die Gleichungen zweier Geraden g_1 und g_2 durch den Punkt $P(5/4)$ so, dass die beiden Punkte $A(\frac{1}{2}/3)$ und $B(\frac{7}{2}/1)$ von ihnen jeweils den gleichen Abstand haben.



Lösung 267: Die eine Gerade geht durch die Mitte der Verbindungsstrecke von A und B und die andere läuft parallel.
Die Mitte liegt bei $M(2/2)$.

Gerade g_1: PM: $y = \frac{2}{3}(x - 2) + 2 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

Gerade g_2: $y = -\frac{2}{3}(x - 5) + 4 = -\frac{2}{3}x + \frac{22}{3}$

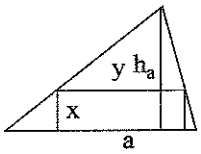
Aufgabe 268: Einem Dreieck mit der Seite a und der dazugehörigen Höhe h_a wird ein Rechteck einbeschrieben, dessen eine Seite auf der Dreieckseite a liegt. Der Umfang des Rechtecks habe den Wert 2s. Wie gross sind die Rechteckseiten?

© 2000 Verlag ad-librum

Lösung 268: Die Rechteckseiten seien x und y. Dann ist $x + y = s$.

Ähnlichkeit: $\frac{y}{a} = \frac{s-x}{a} = \frac{h_a - x}{h_a}$

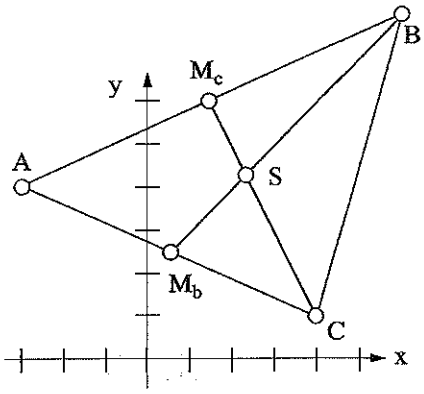
$\Rightarrow x = \frac{h_a(a-s)}{a-h_a}$ und $y = \frac{a(s-h_a)}{a-h_a}$



Aufgabe 269: Bestimmen Sie die exakten Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten A(-3/4), B(6/8) und C(4/1).

Lösung 269: Mitte von $\overline{AB}$: $M_c(1.5/6)$
Mitte von $\overline{AC}$: $M_b(0.5/2.5)$
s_c: $y = -2(x - 4) + 1$
s_b: $y = x + 2$

Schnittpunkt $S(\frac{7}{3} / \frac{13}{3})$



Andere Überlegung:

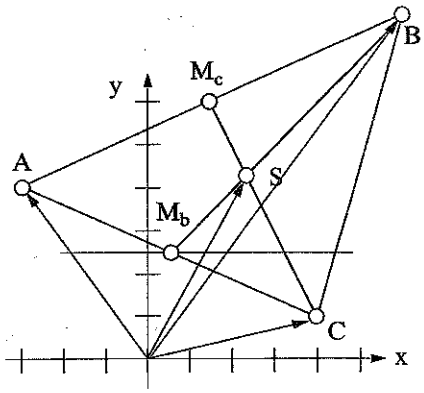
Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie im Verhältnis 1 : 2 , d.h. die x- resp. y-Koordinatendifferenz von M_c und C wird im gleichen Verhältnis geteilt.

$x_S = x_{Mc} + \frac{1}{3}(x_C - x_{Mc}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\left(4 - \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{3}$

$y_S = y_{Mc} + \frac{1}{3}(y_C - y_{Mc}) = 6 + \frac{1}{3}(1 - 6) = \frac{13}{3}$

oder:

Mit Vektoren: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$



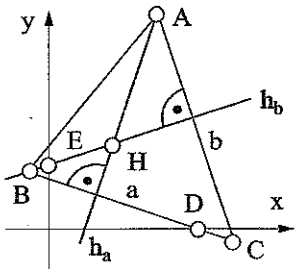
Aufgabe 270: A(5/10) ist die Ecke eines Dreiecks, H(3/4) sein Höhenschnittpunkt. Die Seite a schneidet die x-Achse in D(7/0), die Höhe h_b schneidet die y-Achse in E(0/3). Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte B und C.

Lösung 270: Der Eckpunkt B ist der Schnittpunkt der Höhe h_b = EH mit der Seite a, welche normal zur Geraden h_a = AH durch D ist.
Der Eckpunkt C ist der Schittpunkt von a mit der Seite b normal zu EH durch A.

a: $y = -\frac{1}{3}(x - 7)$; h_b: $y = \frac{1}{3}x + 3$; b: $y = -3(x - 5) + 10$

B: $x + 9 = -x + 7 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B\left(-1/\frac{8}{3}\right)$

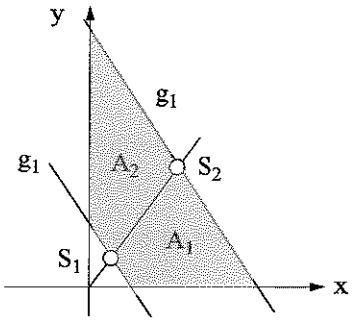
C: $-x + 7 = -9x + 75 \Rightarrow x = \frac{17}{2} \Rightarrow C\left(\frac{17}{2}/-\frac{1}{2}\right)$



Aufgabe 271: Das Viereck, begrenzt durch die beiden Geraden g_1: $2y + 3x - 6 = 0$ und

g_2: $\frac{x}{8} + \frac{y}{12} - 1 = 0$ und die Koordinatenachsen, soll durch eine Gerade durch den Ursprung in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.

Lösung 271: Skizze der vorgegebenen Situation:



Die Vierecksfläche hat den Wert: $A = 48 - 3 = 45$

Schnittpunkte der gesuchten Geraden mit den gegebenen:

$S_1 : 2mx = -3x + 6 \Rightarrow S_1\left(\frac{6}{2m+3} / \frac{6m}{2m+3}\right)$

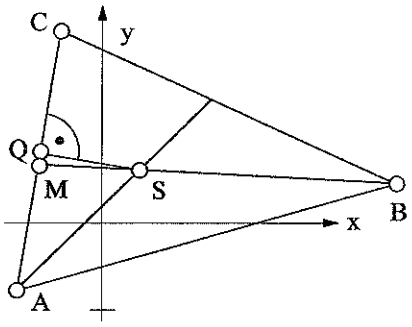
$S_2 : 2mx = -3x + 24 \Rightarrow S_2\left(\frac{24}{2m+3} / \frac{24m}{2m+3}\right)$

Die untere Teilfläche A_1 hat dann den Wert:

$\frac{96m}{2m+3} - \frac{6m}{2m+3} = \frac{45}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

Aufgabe 272: Welchen Abstand hat der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC von der Seite b, wobei A(-4/-3), B(14/2) und C(-2/9)?

Lösung 272: 1. Variante:



Abstand von S zu b als Abstand zweier Punkte S und Q:

Berechnung der Koordinaten von S:

Mitte von $\overline{AC}$: $M(-3/3) \Rightarrow x_B - x_M = 17,\ y_B - y_M = -1$

$\Rightarrow x_S = -3 + \frac{17}{3} = \frac{8}{3};\ y_S = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

Normale zu b durch S:

$y = -\frac{1}{6}(x - \frac{8}{3}) + \frac{8}{3}$

Gerade b: $y = 6(x + 4) - 3$

Schnittpunkt ist der Fusspunkt der Normalen: $-\frac{1}{6}(x - \frac{8}{3}) + \frac{8}{3} = 6(x + 4) - 3$

$\Rightarrow x_Q = -\frac{322}{111},\ y_Q = \frac{133}{37}$

$\Rightarrow d = \overline{SQ} = \sqrt{\left(\frac{322}{111} + \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{133}{37} - \frac{8}{3}\right)^2} \approx \sqrt{(5,6)^2 + (1,3)^2} \approx 5{,}6$

2. Variante:

Der gesuchte Abstand ist ein Drittel der Höhe h_b.

Fläche (Heron): $U = a + b + c = \sqrt{16^2 + 7^2} + \sqrt{2^2 + 12^2} + \sqrt{18^2 + 5^2} \approx 17 + 12 + 18 \approx 48$

$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \approx \sqrt{24(24-17)(24-12)(24-18)} = 24\sqrt{21} \approx 108$

$d = \frac{h_b}{3} = \frac{2F}{3b} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{3b} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{6b}$

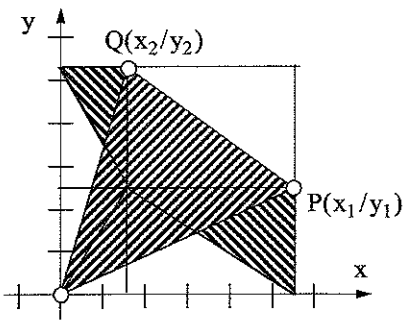
Die Seitenlängen werden mit dem Satz von Pytagoras berechnet.

$\approx \frac{108}{18} = 6$

oder:

© 2000 Verlag ad-librum

Jedes Dreieck ist zerlegbar in Teildreiecke, welche der folgenden Situation entsprechen: Durch Flächenverwandlung (Scherung) folgt allgemein:



$$A_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Also ist:

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} = 103$$

$$\text{Höhe } h_b = \frac{2F}{b} = \frac{206}{\sqrt{148}} \approx 17 \Rightarrow d = \frac{2F}{3b} = \frac{206}{3\sqrt{148}} \approx 5{,}6$$

3. Variante:

Hessesche Normalform der Geraden b: $\dfrac{6x - y + 21}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}} = 0$

Berechnung der Koordinaten von S:
Mitte von $\overline{AC}$: $M(-3/3) \Rightarrow x_B - x_M = 17,\ y_B - y_M = -1$

$\Rightarrow x_S = -3 + \frac{17}{3} = \frac{8}{3};\ y_S = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

Die Koordinaten des Schwerpunktes S, eingesetzt in die linke Seite, ergeben den Abstand

$$d = \frac{16 - \frac{8}{3} + 21}{\sqrt{6^2 + 1}} \approx \frac{101}{3 \cdot 6} \approx 5{,}6.$$

Das negative Vorzeichen sagt aus, dass der Schwerpunkt und der Ursprung des Koordinatensystems auf der gleichen Seite der Geraden b liegen.

4. Variante:

Mit Vektorrechnung:
Der Abstand des Schwerpunktes von b ist die Höhe im Dreieck ASC. Die Dreiecksfläche ist aber die Hälfte des Betrags des Vektorproduktes von $\overrightarrow{AC}$ mit $\overrightarrow{AS}$.

$$\Rightarrow d = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ \frac{20}{3} & \frac{17}{3} \end{vmatrix}}{\sqrt{148}} = \frac{206}{3\sqrt{148}} \approx 5{,}6$$

Aufgabe 273: Eine Handelsgesellschaft möchte Fr. 1,5 Mio. anlegen. Mindestens Fr. 300'000.-, aber höchstens Fr. 500'000.- sollen in Wertpapieren mit einer Rendite von 6% angelegt werden. Der Rest soll in Liegenschaften im Inland mit einer Rendite von 5,5% und im Ausland mit einer Rendite von 7% angelegt werden, wobei der inländische Immobilienanteil mindestens die Hälfte des ausländischen Anteils betragen muss. Wie ist die Anlagepolitik zu wählen, wenn der Ertrag maximal sein soll?

Lösung 273: Es gibt drei Vermögensmassen:

x: Anlage in inländischen Immobilien
y: Anlage in ausländischen Immobilien
1,5 Mio. - x - y: Anlage in Wertpapieren

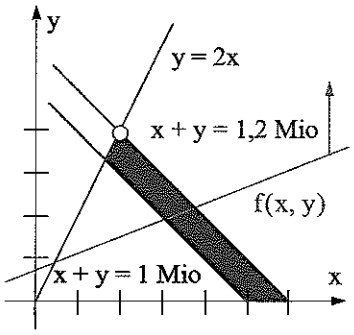
Rendite (Zielfunktion):

$r = 6\%(1{,}5 \text{ Mio.} - x - y) + 5{,}5\% \cdot x + 7\% \cdot y = \max.$

$\Leftrightarrow f(x, y) = 2y - x = \max.$

Bedingungen:

$$\left| \begin{array}{rcl} 1'500'000 - x - y & \geq & 300'000 \\ 1'500'000 - x - y & \leq & 500'000 \\ 2x & \geq & y \end{array} \right|$$



Es können die Ungleichungen einzel betrachtet werden. Dabei werden die ungeeigneten Gebiete weggestrichen. Graphische Darstellung:

Anlagestrategie mit grösster Rendite:

Anlage in inländischen Immobilien: x = 400'000.-
Anlage in ausländischen Immobilien: y = 800'000.-
Anlage in Wertpapieren: 300'000.-

Aufgabe 274: Eine Firma produziert in einem Drittweltland 2 Radiotypen: Für die Produktion des ersten Typs werden 5 Arbeitsstunden und Fr. 30.- für Material aufgewendet, während für den zweiten Typ 7 Arbeitsstunden und Fr. 25.- Materialkosten gerechnet werden. Die Kapazitäten für den ersten betragen 150 und für den zweite Typ 120 pro Tag. Pro Tag stehen 1600 Arbeitsstunden, Fr. 16000.- Kapital zur Verfügung. Die durchschnittliche Arbeitsstunde kostet Fr. 8.-.

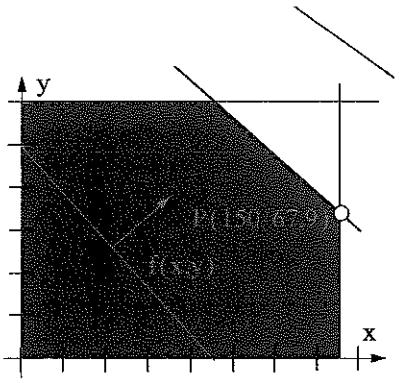
a) Wieviele Radios müssen von jedem Typ produziert werden, damit der Gewinn maximal wird, wenn beim ersten Typ mit einem Gewinn von Fr. 20.- und beim zweiten Radio mit einem solchen von Fr. 18.- gerechnet werden kann?

b) Wie gross ist der maximale Gewinn?

c) Wenn Sie die ganze Situation genauer betrachten, was würden Sie als Unternehmer für Überlegungen machen? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung 274: a) x: Anzahl Radios vom Typ 1
y: Anzahl Radios vom Typ 2

	Typ 1	Typ 2	Extremum
Arbeitsstunden	5	7	≤ 1600
Materialkosten	30.-	25.-	≤ 16000.-
Lohnkosten pro Arbeitsstunde	8.-	8.-	
Gewinn pro Gerät	20.-	18.-	
Kapazität	150	120	



Die Tabelle gibt einen Überblick über die einzelnen Beziehungen,welche durch das folgende Ungleichungssystem beschrieben werden:

© 2000 Verlag ad-librum

$$\left|\begin{array}{rrr} x & \geq & 0 \\ & y \geq & 0 \\ 5x + & 7y \leq & 1600 \\ 70x + & 81y \leq & 16000 \\ x & \leq & 150 \\ & y \leq & 120 \end{array}\right|$$

Das Ungleichungssytem wird durch das folgende Gebiet dargestellt:

Die Zielfunktion $f(x,y) = 20x + 18y$ muss ein Maximum annehmen. $20x + 18y = a$ stellt eine Gerade dar, wobei der y-Achsenabschnitt durch a bestimmt wird. Je grösser a wird, desto mehr verschiebt sich die Gerade in positiver y-Richtung. Die Funktion $f(x,y)$ hat somit ihr Maximum an der Stelle, wo die Gerade mit der Gleichung $20x + 18y = a$ möglichst weit oben liegt und noch das Gebiet berührt.
Die Steigung der Geraden, welche die Zielfunktion beschreibt, ist fast gleich gross wie jene der Begrenzungslinie mit der Gleichung $70x + 81y = 16000$. Vergleicht man die Steigungen, so wird sofort klar, dass das Maximum im Punkt $P(150/67{,}9)$ angenommen wird.
=> Es werden somit 150 Radios vom Typ A und 67 vom Typ B produziert.

b) Der Maximalgewinn beträgt: Fr. 4206.-

c) Da nicht alle Bedingungen des Gleichungssystems das Lösungsgebiet beschränken, sind die Ressourcen noch nicht optimal genutzt.
1. Die Arbeitskapzität ist zu gross.
2. Das Produktionskapital ist zu gering, um die Produktionskapazität des Typs B zu erreichen.
Eine Erhöhung des Kapitals könnte mittels Arbeitsstundenreduktion erreicht werden.

Aufgabe 275: Schreiben Sie den folgenden Ausdruck p ohne Betragsstriche und vereinfachen Sie das Resultat:
$p = |a - b||3b| - |b - 5a||-2a|$

Lösung 275: Es gilt: $p = |a - b||3b| - |b - 5a||-2a| = 3|a - b||b| - 2|b - 5a||a|$

1. Fall: $a \geq 0$ und $b \geq 0$: $\Rightarrow p = 3|a - b|b - 2|b - 5a|a$

$\Rightarrow p = 3b(a - b) - 2a(b - 5a)$, wenn $a \geq b \wedge a \leq \frac{b}{5}$, Widerspruch !!!

$\Rightarrow p = 3b(a - b) + 2a(b - 5a) = 5ab - 3b^2 - 10a^2$, wenn $a \geq b \wedge \frac{b}{5} < a$

$\Rightarrow p = 3b(b - a) - 2a(b - 5a) = 3b^2 - 5ab + 10a^2$, wenn $a < b \wedge a \leq \frac{b}{5}$

$\Rightarrow p = 3b(b - a) + 2a(b - 5a) = 3b^2 - ab - 10a^2$, wenn $a < b \wedge \frac{b}{5} < a$

2. Fall: $a \geq 0$ und $b < 0$: $\Rightarrow p = 3|a - b|(-b) - 2|b - 5a|a$
$\Rightarrow p = -3b(a - b) - 2a(5a - b) = 3b^2 - ab - 10a^2$

3. Fall: $a < 0$ und $b \geq 0$: $\Rightarrow p = 3b|a - b| - 2|b - 5a|(-a)$
$\Rightarrow p = 3b(b - a) - 2(b - 5a)(-a) = 3b^2 - ab - 10a^2$

4. Fall: $a < 0$ und $b < 0$: $\Rightarrow p = 3|a - b|(-b) + 2|b - 5a|a$

$\Rightarrow p = 3(a - b)(-b) - 2(b - 5a)a = 3b^2 - 5ab + 10a^2$, wenn $b \leq a < 0 \wedge \frac{b}{5} < a$

$\Rightarrow p = 3(a - b)(-b) + 2(b - 5a)a = 3b^2 - ab - 10a^2$, wenn $b \leq a \wedge a \leq \frac{b}{5}$

$\Rightarrow p = 3(b - a)(-b) + 2(b - 5a)a = 5ab - 3b^2 - 10a^2$, wenn $a < b \wedge a \leq \frac{b}{5}$

$\Rightarrow p = 3(b - a)(-b) - 2(b - 5a)a$, wenn $a < b \wedge \frac{b}{5} < a$, Widerspruch!!!

© 2000 Verlag ad-librum

$$\text{Somit gilt zusammengefasst: } p = \begin{cases} 5ab - 3b^2 - 10a^2, \text{ falls } 0 \le b \le a \vee a < b \le \frac{b}{5} < 0 \\ 3b^2 - 5ab + 10a^2, \text{ falls } 0 \le a \le \frac{b}{5} \vee \frac{b}{5} < a \le 0 \\ 3b^2 - ab - 10a^2, \text{ falls } \begin{cases} 0 \le \frac{b}{5} < a < b \vee (0 \le a \wedge b < 0) \\ \vee \\ (a < 0 \wedge 0 \le b) \vee b \le a \le \frac{b}{5} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

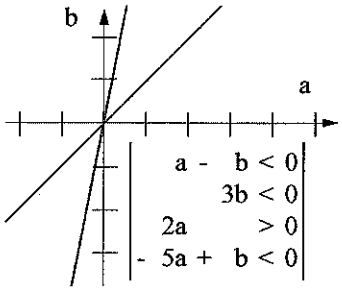
oder:

Im Ausdruck $p = |a - b||3b| - |b - 5a||-2a|$ sind die Betragsstriche wegzulassen. Dies kann nur unbesehen geschehen, wenn die einzelnen Faktoren positiv sind. Dies führt zu folgendem Ungleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rrl} a - & b & \ge 0 \\ & 3b & \ge 0 \\ -\ 2a & & \ge 0 \\ -\ 5a + & b & \ge 0 \end{array} \right|$$

Betrachtet man das zum Ungleichungssystem gehörige Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rrl} a - & b & = 0 \\ & 3b & = 0 \\ -\ 2a & & = 0 \\ -\ 5a + & b & = 0 \end{array} \right|$$



so wird durch die graphische Darstellung die Zeichenebene in 8 Teilgebiete unterteilt. Keines dieser Teilgebiete wird durch das vorangehende Ungleichungssystem beschrieben. Einzig der Ursprung erfüllt die Bedingungen. Zu jedem Gebiet gehört aber ein Ungleichungssystem und damit ein bestimmter Ausdruck von p (vgl. Graphik). Überschreitet man die Grenze von einem Gebiet zum andern, so wechselt jeweils nur ein Vorzeichen. Damit kann aber von einem speziellen Gebiet ausgegangen (z.B. 4. Quadrant) und sukzessive der Ausdruck p bestimmt werden. Auf den Grenzen kann der Ausdruck allein durch a oder durch b ausgedrückt werden.

$\Rightarrow p = -3(a - b)b + 2a(b - 5a) = 3b^2 - ab - 10a^2$

$$\text{Zusammengefasst gilt: } p = \begin{cases} 5ab - 3b^2 - 10a^2, \text{ falls } 0 < b < a \vee a < b < \frac{b}{5} < 0 \\ 3b^2 - 5ab + 10a^2, \text{ falls } 0 < a < \frac{b}{5} \vee \frac{b}{5} < a < 0 \\ 3b^2 - ab - 10a^2, \text{ falls } \begin{cases} 0 < \frac{b}{5} < a < b \vee (0 < a \wedge b < 0) \\ \vee \\ (a < 0 \wedge 0 < b) \vee b < a < \frac{b}{5} < 0 \end{cases} \\ 3b^2, \text{ falls } b \ne 0 \wedge a = 0 \\ -10a^2, \text{ falls } a \ne 0 \wedge b = 0 \\ 0, \text{ falls } a = b = 0 \\ -8a^2, \text{ falls } a = b \ne 0 \\ 60a^2, \text{ falls } a = \frac{b}{5} \ne 0 \end{cases}$$

© 2000 Verlag ad-librum

10 Quadratische Gleichungen

Aufgabe 276: Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung: $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

Lösung 276: $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$
$\Leftrightarrow x^4 - 13x^2 - 48 = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 - 16)(x^2 + 3) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 4)(x^2 + 3) = 0$
Im Reellen:
$x_1 = 4;\ x_2 = -4$
Im Komplexen:
$x_1 = 4;\ x_2 = -4;\ x_3 = \sqrt{3}\,j;\ x_4 = -\sqrt{3}\,j$

Aufgabe 277: Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $\frac{x^2}{x-6} - 9 = \frac{36}{x-6}$

b) $2\sqrt{7+2x} - 3\sqrt{3-2x} = \sqrt{8x+1}$

Lösung 277: a) $\frac{x^2}{x-6} - 9 = \frac{36}{x-6} \Leftrightarrow x^2 - 9(x - 6) = 36$, falls $x \neq 6$
$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = (x - 6)(x - 3) = 0$, falls $x \neq 6 \Leftrightarrow x = 3$

b) $2\sqrt{7+2x} - 3\sqrt{3-2x} = \sqrt{8x+1} \Rightarrow 4(7 + 2x) - 12\sqrt{(7+2x)(3-2x)} + 9(3 - 2x) = 8x + 1$
$\Rightarrow 2\sqrt{(7+2x)(3-2x)} = 9 - 3x \Rightarrow 25x^2 - 22x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{3}{25}$
Durch das Quadrieren ist eine Kontrolle nötig. Sie zeigt, dass x_2 keine Lösung ist.

Aufgabe 278: Lösen Sie die folgende Gleichung: $ax^2 - a^2(x + b^2) = ab(x - ab)$

Lösung 278: $ax^2 - a^2(x + b^2) = ab(x - ab) \Leftrightarrow ax^2 - x(a^2 + ab) = 0$
Falls $a \neq 0$: $x = 0,\ x = a + b$
Falls $a = 0$: x beliebig reell

Aufgabe 279: Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

b) $(3x - 2a + b)^2 + 2b(3x + b - 2a) = a^2 - b^2$

Lösung 279: a) Die rechte Seite der gegebenen Gleichung $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$ in Faktoren zerlegen:
$(x - a + b)(x - a + c) = ((a - b) - x)(a - b) + x)$
Umformen, damit eine Seite der Gleichung 0 wird und die andere Seite faktorisieren:
$(x - a + b)(x - a + c) - ((a - b) - x)(a - b) + x) = 0 \Leftrightarrow (x - a + b)(2x + c - b) = 0$
$\Rightarrow x_1 = \frac{b-c}{2},\ x_2 = a - b$

b) Die Struktur der gegebenen Gleichung $(3x - 2a + b)^2 + 2b(3x + b - 2a) = a^2 - b^2$ wird durch die Substitution besser sichtbar:

© 2000 Verlag ad-librum

$y = 3x - 2a + b \Rightarrow y^2 + 2by + b^2 = (y + b)^2 = a^2 \Rightarrow y_{1,2} = -b \pm a$

Zurücksubstituieren:

$x_1 = \frac{1}{3}(3a - 2b)$, $x_2 = \frac{1}{3}(a - 2b)$

Aufgabe 280: Bestimmen Sie x aus der folgenden Gleichung: $x^2 - (a^2 - b^2)\,x = (a + b)\,x - (a + b)^2(a - b)$

Lösung 280: Die Gleichung nach der Potenz der Variablen sortieren:

$x^2 - (a^2 - b^2)\,x = (a + b)\,x - (a + b)^2(a - b) \Leftrightarrow x^2 - (a + b)(a - b + 1)\,x = -(a + b)^2(a - b)$

Durch Adidition von $\frac{1}{4}(a + b)^2(a - b + 1)^2$ wird die Gleichung quadratisch ergänzt:

$$(x - \frac{1}{2}(a + b)(a - b + 1))^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2(a - b + 1)^2 - (a + b)^2(a - b)$$

$$= \frac{1}{4}(a + b)^2((a - b + 1)^2 - 4(a - b)) = \frac{1}{4}(a + b)^2((a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b) - 4(a - b))$$

$$= \frac{1}{4}(a + b)^2((a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a + 2b)) = \frac{1}{4}(a + b)^2(a - b - 1)^2$$

$$x = \frac{1}{2}(a + b)((a - b + 1) \pm (a - b - 1)) \Rightarrow x_1 = a + b,\ x_2 = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

oder:

$$x^2 - (a^2 - b^2)\,x = (a + b)\,x - (a + b)^2(a - b) \Leftrightarrow (x - (a^2 - b^2))x = (a + b)(x - (a + b)(a - b))$$
$$\Leftrightarrow (x - (a^2 - b^2))x - (a + b)(x - (a + b)(a - b)) = 0 \Leftrightarrow (x - (a^2 - b^2))(x - (a + b)) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = a + b,\ x_2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Aufgabe 281: Bestimmen Sie x aus den folgenden Gleichungen:

a) $a^2 - x^2 = (x - a)(b + c - x)$

b) $(2x - a)^2 = b(2x - a) + 2\,b^2$

Lösung 281: a) Umformen, damit eine Seite der Gleichung 0 wird, und die andere Seite faktorisieren:

$a^2 - x^2 = (x - a)(b + c - x) \Leftrightarrow (a - x)(a + x + b + c - x) = 0$

Falls $(a + b + c) \neq 0 \Rightarrow x = a$

Falls $(a + b + c) = 0 \Rightarrow x$ beliebig

b) Die Struktur der gegebenen Gleichung $(2x - a)^2 = b(2x - a) + 2b^2$ wird durch die Substitution besser sichtbar. Umformen, damit eine Seite der Gleichung 0 wird, und die andere Seite faktorisieren:

$$z = 2x - a \Rightarrow z^2 - bz - 2b^2 = 0 = (z - 2b)(z + b) \Rightarrow z = \begin{cases} 2b \\ -b \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} b + \frac{a}{2} \\ \frac{a - b}{2} \end{cases}$$

Aufgabe 282: a) Welches Vieleck hat 18 Diagonalen mehr als Seiten?

b) Bei einer Party prosten sich sämtliche Teilnehmer gegenseitig zu. Dabei klingen 20 mal mehr die Gläser als Partygäste anwesend sind. Wieviele Gäste sind anwesend?

Lösung 282: a) Anzahl Diagonalen von einer Ecke eines n-Ecks aus: n - 3

Gesamtzahl Diagonalen eines n-Ecks beträgt: $\frac{n(n-3)}{2}$

© 2000 Verlag ad-librum

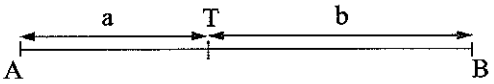
Es soll gelten: $\frac{n(n-3)}{2} = n + 18 \Rightarrow n^2 - 5n - 36 = 0 = (n-9)(n+4) \Rightarrow n = 9$, da $n \in \mathbb{N}$

b) n: Anzahl Gäste

Es gilt: $\frac{n(n-1)}{2} = 20n \Rightarrow n^2 - 41n = 0 = n(n-41) \Rightarrow n = 41$, da $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 283: Ein Fussgänger geht mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h von A nach B. Er wird 1 Stunde und 20 Minuten nach seinem Aufbruch von einem Radfahrer überholt, der 30 Minuten nach dieser Begegnung in B ankommt, dort sofort wendet und in A zu derselben Zeit ankommt, zu welcher der Fussgänger B erreicht. Wie weit ist B von A entfernt?

Lösung 283: Festlegung:



T: Überholungsort

t: Zeit, welche der Fussgänger von T nach B braucht.

τ: Zeit, welche der Fussgänger von A nach T braucht.

v_F: Geschwindigkeit des Fussgängers

v_R: Geschwindigkeit des Radfahrers

Weg, der vom Fussgänger bis zur Überholung zurückgelegt wird: $a = v_F\tau = \frac{20}{3}$ km

Strecke zwischen T und B: $b = v_F t$

Weg, der vom Fussgänger bis zur Überholung zurückgelegt wird: $v_R t = a + 2b$

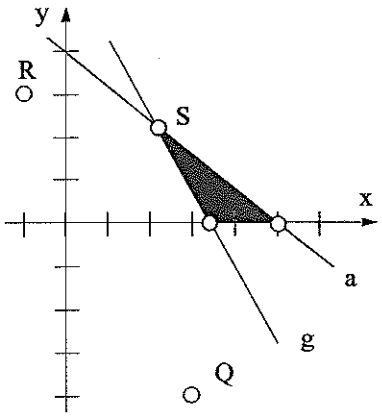
Strecke AB: $v_R\left(t - \frac{1}{2}\right) = a + b$

$$v_R = \frac{a+2b}{t} = \frac{a+b}{t-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{20}{3}+2b}{\frac{b}{5}} = \frac{\frac{20}{3}+b}{\frac{b}{5}-\frac{1}{2}} \Rightarrow 3b^2 - 15b - 50 = 0 \Rightarrow b = \frac{15 \pm \sqrt{825}}{6} \approx \frac{15 \pm 29}{6} \approx \begin{cases} 7{,}3 \\ -2{,}3 \end{cases}$$

Der negative Wert ist keine Lösung des Problems.
Damit beträgt näherungsweise die Entfernung von A nach B: AB = 14 km.

Aufgabe 284: Gegeben sind eine Gerade a durch ihre Gleichung $y = -\frac{4}{5}x + 4$ sowie die beiden Punkte R(-1/3) und Q(3/-4). Eine Gerade g soll so parallel zu RQ gelegt werden, dass die Dreicksfläche, welche zwischen den Geraden a und g und der x - Achse entsteht, den Wert 4 hat.

Lösung 284: Ansatz für die Gerade g ist $y = -\frac{7}{4}x + b$



Die x-Koordinate des Schnittpunktes S der Geraden a und g ist die Lösung der Gleichung

$-\frac{4}{5}x + 4 = -\frac{7}{4}x + b \Rightarrow x_S = \frac{20}{19}(b-4) \Rightarrow y_S = \frac{1}{19}(140 - 16b)$

Die Schnittpunkte der beiden Geraden mit der x - Achse liegen bei $x_a = 5$ resp. $x_g = \frac{4b}{7}$

Die Dreiecksfläche ist somit $A = 4 = \frac{(x_a - x_g)y_S}{2}$

$\Rightarrow (35 - 4b)^2 = 266 \Rightarrow 16b^2 - 280b + 959 = 0$

$\Rightarrow b_{1,2} = \frac{140 \pm \sqrt{140^2 - 16 \cdot 959}}{16} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 959}}{4} = \frac{35 \pm \sqrt{266}}{4} \approx \frac{35 \pm 16}{4}$

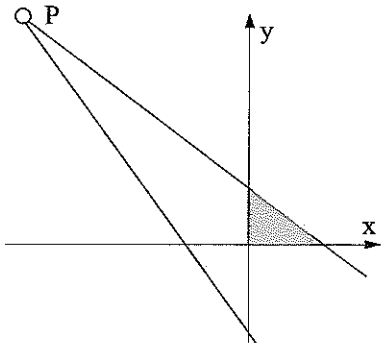
$\Rightarrow b_1 \approx 4{,}7$ und $b_2 \approx 12{,}8$

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 285: Durch den Punkt P(-12/12) soll eine Gerade so gelegt werden, dass von den Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem absoluten Flächeninhalt A = 6 (Flächeneinheiten) abgeschnitten wird. Wie heisst die Gleichung der Geraden?

Lösung 285: Ansatz für die Gerade: $y = m(x + 12) + 12$
Die Achsenabschnitte sind dann:

$$x = -\left(\frac{12}{m} + 12\right) \text{ und } y = 12m + 12$$



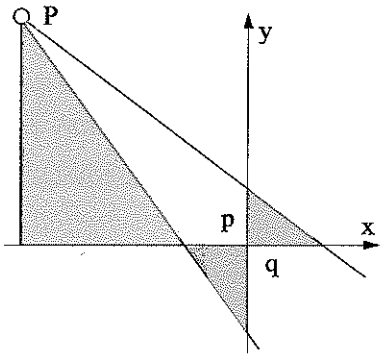
Bedingung für die Fläche: $-\left(\frac{12}{m} + 12\right)(2m + 2) = 1$

$$\Rightarrow 12m^2 + 25m + 12 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{4},\ m_2 = -\frac{4}{3}$$

Die Geradengleichungen lauten somit:

$$y = -\frac{3}{4}x + 3 \text{ und } y = -\left(\frac{4}{3}x + 4\right)$$

oder:



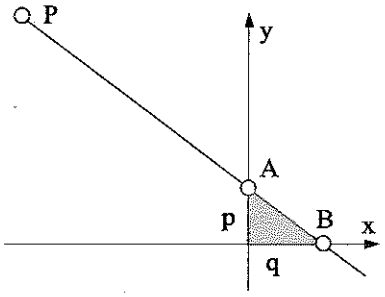
Aus Symmetriegründen ist klar, dass es zwei Lösungen mit reziproken Steigungen gibt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt: $\frac{12}{12 + q} = \frac{p}{q}$

Aus der Fläche folgt ferner: $pq = 12$
$\Rightarrow q^2 - q - 12 = (q - 4)(q + 3)$
$\Rightarrow q_1 = 4,\ q_2 = -3$
$\Rightarrow p_1 = 3,\ p_2 = -4$
Die Geradengleichungen lauten somit:

$$y = -\frac{3}{4}x + 3 \text{ und } y = -\left(\frac{4}{3}x + 4\right)$$

oder:



Die Fläche kann mit Hilfe der Koordinaten der Punkte berechnet werden.
Die Fläche des Dreiecks ΔABO beträgt: $pq = 12$
Die Fläche des Dreiecks ΔABP muss Null sein, da A, B und P auf einer Geraden liegen müssen.

$$F_{\Delta ABP} = F_{\Delta ABO} + F_{\Delta OBP} + F_{\Delta AOP} = F_{\Delta ABO} + F_{\Delta OBP} - F_{\Delta APO} = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p \\ -12 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -12 & 12 \\ q & 0 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow pq + 12p - 12q = 0 \Rightarrow q - p = 1, \text{ da } pq = 12$$

$$\left|\begin{matrix} (q - p)^2 = & 1 \\ 4pq = & 48 \end{matrix}\right|$$

$$\Rightarrow (q + p)^2 = 49 \Rightarrow q + p = \pm 7 \Rightarrow q_1 = 4,\ q_2 = -3 \Rightarrow p_1 = 3,\ p_2 = -4$$

Die Geradengleichungen lauten somit: $y = -\frac{3}{4}x + 3$ und $y = -\left(\frac{4}{3}x + 4\right)$

Aufgabe 286: Die Gleichung $4x^2 + 6x + c = 0$ hat negativ reziproke Lösungen. Wie gross ist c und wie heissen die Lösungen?

© 2000 Verlag ad-librum

Lösung 286: Es gilt: $x_1 = -x_2^{-1}$

Anwendung des Satzes von Viëta auf die quadratische Gleichung $4x^2 + 6x + c = 0$:

$$\Rightarrow x_1 x_2 = -\frac{x_2}{x_2} = -1 = \frac{c}{4} \Rightarrow c = -4 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 287: Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wobei p und q reelle Zahlen sind, hat $1 + j$ als Lösung. Bestimmen Sie p und q.

Lösung 287: Die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lauten: $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

Sei $x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = 1 + j$

$\Rightarrow p = -2$

Diskriminante: $4 - 4q = -4 \Rightarrow q = 2$

oder:

Hat eine reelle quadratische Gleichung komplexe Lösungen, so sind diese konjugiert komplex.

$\Rightarrow x_1 = 1 + j;\ x_2 = \overline{x_1} = 1 - j$

Laut Viëta gilt: $p = x_1 + x_2 = -2$

$q = x_1 x_2 = 2$

Aufgabe 288: Wie muss man c wählen, dass $4x^2 + (c + 4)x + c = 0$

a) zwei gleiche Lösungen hat?

b) entgegengesetzt gleiche Lösungen hat?

c) 0 als Lösung hat?

Lösung 288: Die Lösungen der Gleichung $4x^2 + (c + 4)x + c = 0$ lauten: $x_{1,2} = \frac{-(c+4) \pm \sqrt{(c+4)^2 - 4^2 c}}{2}$

a) Diskriminante muss 0 sein: $(c + 4)^2 - 16c = 0 = (c - 4)^2 \Rightarrow c = 4$

b) Laut Viëta: $c = -4$

c) Laut Viëta: $c = 0$

Aufgabe 289: Diskutieren Sie die Gleichung $(\lambda - 1)x^2 - \lambda x - 2\lambda = 0$. Für welche Werte von λ hat die Gleichung

a) keine reelle Lösung?

b) eine reelle Lösung?

c) zwei reelle Lösungen?

Lösung 289: Für $\lambda = 1$ handelt es sich bei $(\lambda - 1)x^2 - \lambda x - 2\lambda = 0$ um eine lineare Gleichung, welche genau eine reelle Lösung hat, nämlich $x = 2$.

Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, falls $\lambda \neq 1$.

Damit hängt die Anzahl der Lösungen $x_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 8(\lambda - 1)\lambda}}{2}$ von der Diskriminante D ab:

$D = 9\lambda^2 - 8\lambda = (9\lambda - 8)\lambda$

© 2000 Verlag ad-librum

a) $D < 0 \Rightarrow 0 < \lambda < \frac{8}{9}$

b) $\lambda = 1$ resp. $D = 0 \Rightarrow \lambda = 0; \lambda = \frac{8}{9}$ (für Doppellösungen von x!)

c) $D > 0 \Rightarrow 0 > \lambda; 1 > \lambda > \frac{8}{9}; \lambda > 1$

Aufgabe 290: Für welche Werte von a hat die Gleichung: $3x^2 + 9(1-x) + (1+x)a^2 + (6+x^2)a = 0$

a) zwei reziproke Lösungen?

b) zwei entgegengesetzte Lösungen?

c) zwei zusammenfallende Lösungen?

d) Null als Lösung?

Lösung 290: Zuerst wird die gegebene Gleichung $3x^2 + 9(1-x) + (1+x)a^2 + (6+x^2)a = 0$ nach den Potenzen von x geordnet: $(3+a)x^2 + (a^2-9)x + 9 + 6a + a^2 = 0$

a) Da $x_1 = x_2^{-1}$ wird nach Viëta wird das absolute Glied: $\Rightarrow x_1 x_2 = \frac{x_2}{x_2} = 1$

$9 + 6a + a^2 = 1 \Rightarrow 8 + 6a + a^2 = (4+a)(2+a) = 0 \Rightarrow a_1 = -4; a_2 = -2$

b) nach Viëta wird der Koeffizient $x_1 + x_2 = x_1 - x_1 = 9 - a^2$ des linearen Gliedes Null:
$\Rightarrow a_3 = 3; a_4 = -3$ (Kontrolle, ob absolutes Glied Null wird, da der Koeffizient von x^2 Null ist.)

c) Die Diskriminante muss Null werden:
$\Rightarrow (a^2-9)^2 - 4(3+a)(8+6a+a^2) = (a-3)^2(a+3)^2 - 4(3+a)(a+3)^2$
$= ((a-3)^2 - 4(3+a))(a+3)^2 = (a^2 - 10a - 3)(a+3)^2 = 0$
$\Rightarrow a_3 = 3$ (doppelt!); $a_{5,6} = 5 \pm 2\sqrt{7}$

d) nach Viëta wird das absolute Glied Null: $9 + 6a + a^2 = (a+3)^2 = 0 \Rightarrow a_3 = -3$ (doppelt!)

Aufgabe 291: Bestimmen Sie x in der folgenden Gleichung: $x^4 + 6b(x^2 - 3a) + 3a(3a - 2x^2) + 9b^2 = 0$

Lösung 291: Bei der Gleichung $x^4 + 6b(x^2 - 3a) + 3a(3a - 2x^2) + 9b^2 = 0$ handelt sich um eine biquadratische Gleichung, welche zusammengefasst folgende Form bekommt:
$x^4 + 6x^2(b-a) + 9(b-a)^2 = 0$
$(x^2 + 3(b-a))^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3(a-b)$ ist doppelte Lösung.
Falls $a \geq b \Rightarrow x = \pm\sqrt{3(a-b)}$ ist doppelte Lösung.
Falls $a < b \Rightarrow$ keine reelle Lösung.

Im komplexen Zahlenbereich: $x = \pm\sqrt{3(a-b)}$ ist doppelte Lösung.

Aufgabe 292: Bestimmen Sie die reellen Lösungen der folgenden Gleichung: $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

Lösung 292: Die Gleichung $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$ ist nur definiert unter der Bedingung, dass $x > -a \wedge x \geq a$

Multiplikation mit dem Nenner ergibt: $-\sqrt{x^2-a^2} = -b \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2+b^2}$.

© 2000 Verlag ad-librum

Aus der Bedingung $x > -a \wedge x \geq a$ folgt $x \geq 0$ und damit ist nur $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ Lösung.

Aufgabe 293: Berechnen Sie x: $\frac{b\sqrt{a-x} - a\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}} = x$

Lösung 293: Die Gleichung $\frac{b\sqrt{a-x} - a\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}} = x$ ist nur unter den Bedingungen $x \leq a \wedge x \leq b \wedge a \neq b$ definiert.

$b\sqrt{a-x} - a\sqrt{b-x} = x(\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}) \Rightarrow (b-x)\sqrt{a-x} = (a-x)\sqrt{b-x}$

$\Rightarrow (b-x)^2(a-x) = (a-x)^2(b-x) \Rightarrow (b-x)^2(a-x) - (a-x)^2(b-x) = (a-x)(b-x)(b-a) = 0$

$\Rightarrow x_1 = a; x_2 = b$

Eine Kontrolle ist unumgänglich, da quadriert wurde.

$x = a \Rightarrow \frac{-a\sqrt{b-a}}{-\sqrt{b-a}} = a \Rightarrow a = a$

$x = b \Rightarrow \frac{b\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}} = b \Rightarrow b = b$

Beide Werte $x_1 = a; x_2 = b$ sind Lösungen, wenn $a \neq b$.

Falls $a = b \Rightarrow \frac{a\sqrt{a-x} - a\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{a-x}} = x = \frac{0}{0} \Rightarrow x$ ist beliebig.

Aufgabe 294: Für welche Werte von p hat die folgende Gleichung keine Lösungen?
$p(-1 - y)^2 + (p - 1)y^2 = 1$

Lösung 294: Zuerst die gegebene Gleichung $p(-1 - y)^2 + (p - 1)y^2 = 1$ nach Potenzen von y sortieren:

$y^2(2p - 1) + 2py + p - 1 = 0$

Wenn keine Lösungen existieren sollen, muss die Diskriminante < 0 sein:

$D = 4p^2 - 4(2p - 1)(p - 1) < 0$

$\Rightarrow p^2 - 3p + 1 = (p - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(p - \frac{3+\sqrt{5}}{2}) > 0 \Rightarrow p < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee p > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Aufgabe 295: Bestimmen Sie den Faktor p in der Gleichung $bx^2 - apx - a^2b = 0$ so, dass $x_1 = ab$ eine Lösung ist, wobei a und b vorgegebene Werte sind.

Lösung 295: $bx^2 - apx - a^2b = 0$ ist eine quadratische Gleichung in der Varialblen x.

Nach Viëta ist: $x_1x_2 = -a^2 = abx_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{a}{b}$, und es ist $x_1 + x_2 = \frac{ap}{b}$, falls $b \neq 0$

$\Rightarrow p = \left(ab - \frac{a}{b}\right)\frac{b}{a} = b^2 - 1$, falls $b \neq 0$ und $a \neq 0$

Falls $a = 0$ und $b \neq 0$

$\Rightarrow bx^2 = 0 \wedge x_1 = ab = 0 \Rightarrow$ Die Gleichung ist somit unabhängig von $p \Rightarrow p$ ist beliebig

Falls $b = 0$

$\Rightarrow x_1 = ab = 0 \wedge -apx = 0 \Rightarrow p \in \mathbb{R}$ unabhängig von a

oder:

Da $x_1 = ab$ eine Lösung ist, erfüllt sie die Gleichung.

Also ist $a^2b^3 - a^2bp - a^2b = a^2b(b^2 - p - 1) = 0 \Rightarrow p = b^2 - 1$, falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$

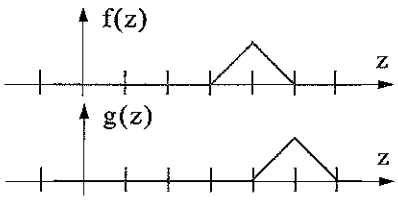
Sonst $p \in \mathbb{R}$.

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 296: Seien A und B die folgenden zwei Aussagen mit der entsprechenden Wahrheitsfunktion f(z) und g(z):

A: Die Zahl z ist nahe bei 4.

B: Die Zahl z ist nahe bei 5.



Skizzieren Sie möglichst genau die Graphen der Wahrheitsfunktionen, welche zu den folgenden Aussagen gehören.

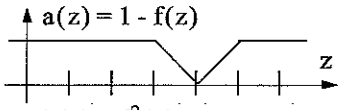
a) Die Zahl z ist nicht nahe bei 4.

b) Die Zahl z ist sehr nahe bei 4.

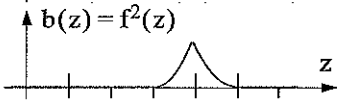
c) Die Zahl z ist weniger nahe bei 5.

d) Die Zahl z ist nicht nahe bei 4 und 5.

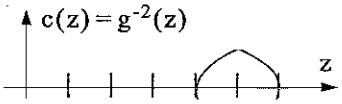
Lösung 296: a) $a(z) = 1 - f(z)$



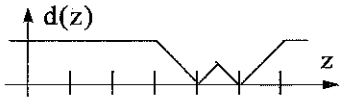
b) Der Begriff "sehr" ist nicht explizit definiert worden. Doch es ist klar, dass es sich um eine Konzentration handelt, so dass der Graph unter dem Graphen der Wahrheitsfunktion der Aussage A liegt. Beispielsweise: $Konz(A) = f^2(z)$
Der Graph setzt sich aus zwei Parabelbögen zusammen.



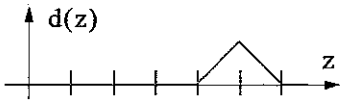
c) Der Begriff "weniger" ist nicht explizit definiert worden. Doch es ist klar, dass es sich um eine Dilatation handelt, so dass der Graph unter dem Graphen der Wahrheitsfunktion der Aussage B liegt. Beispielsweise: $Dil(A) = g^{-2}(z)$
Der Graph setzt sich aus zwei Parabelbögen zusammen.



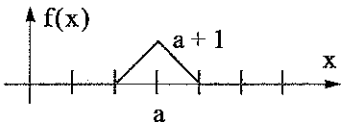
d) Der Satz "Die Zahl z ist nicht nahe bei 4 und 5", ist nicht ganz klar formuliert. In der Umgangssprache meint man damit wohl: Die Zahl z ist nicht nahe bei 4 und auch nicht nahe 5. Der Graph hat dann die dargestellte Form.



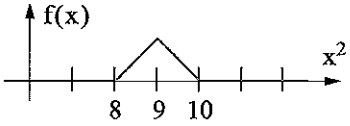
Man könnte aber auch der Ansicht sein, dass nach mathematischen Gesichtspunkten das "nicht" stärker bindet als das "und". Der Satz würde dann präziser wie folgt lauten: Die Zahl z ist nicht nahe bei 4 und jedoch nahe 5. Der Graph hat dann die dargestellte Form:



Aufgabe 297: Für welche Werte von x ist die folgende Aussage wahr:
$x^2 \approx 9 \iff x = 3$, falls $x \approx a$ durch die nebenstehende Wahrheitsfunktion definiert ist.



Lösung 297: Die Wahrheitsfunktion von ist $x^2 \approx 9$ als Funktion von x^2 ist durch die folgede Graphik dargestellte:



Als Funktion von x ist diese im folgenden Bereich von Null verschieden: $-\sqrt{10} \le x \le -2\sqrt{2} \vee 2\sqrt{2} \le x \le \sqrt{10}$

Die Wahrheitsfunktionen von $x^2 \approx 9$ resp. $x = 3$ sind nur im folgenden Bereich übereinstimmend und damit wahr:

$x \le -\sqrt{10} \vee -2\sqrt{2} \le x < 2\sqrt{2} \vee x = 3 \vee \sqrt{10} \le x$

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 298: Bestimmen sie die Parameter a, n, m der Funktion $y = a(x + n)^2 + m$, wenn der Graph durch P(3/4) geht und S(2/5) der Scheitel ist

Lösung 298: $y = a(x + n)^2 + m = ax^2 + 2anx + an^2 + m$

Viëta: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2an}{2a} = 2 \Rightarrow n = -2$

$ax_S^2 + 2anx_S + an^2 + m = y_S \Rightarrow 4a - 8a + 4a + m = 5 \Rightarrow m = 5$

$ax_P^2 + 2anx_P + an^2 + m = y_P \Rightarrow 4 = 3^2a - 2 \cdot 3 \cdot 2a + 2^2a + 5 \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow y = -(x + 2)^2 + 4$

Aufgabe 299: Die beiden Geraden mit den Gleichungen $y = -2x - 3$ und $y = x$ sind Tangenten an die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$. Bestimmen Sie p und q.

Lösung 299: Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ mit Geraden mit den Gleichungen $y = -2x - 3$ und $y = x$ schneiden und eine Doppellösung verlangen:

$$x^2 + px + q = x \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 - p \pm \sqrt{(1-p)^2 - 4q}}{2}$$

$$x^2 + px + q = -2x - 3 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-(p+2) \pm \sqrt{(p+2)^2 - 4(q+3)}}{2}$$

Die Diskriminanten müssen verschwinden, was zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$\left| \begin{array}{l} p^2 - 2p - 4q + 1 = 0 \\ p^2 + 4p - 4q - 8 = 0 \end{array} \right|$$

Es handelt sich um ein nichtlineares Gleichungssystem in zwei Variablen.

Dieses kann mittels Substitution von $q = \frac{p^2 + 4p - 8}{4}$ in die folgende Gleichung umgeformt werden:

$$6p = 9 \Rightarrow p = \frac{3}{2};\ q = \frac{1}{16}$$

Aufgabe 300: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} y^2 = x \\ 8y = x^2 \end{array} \right|$$

Lösung 300: Gesucht sind Zahlenpaare (x,y), welche das vorliegende, nichtlineare Gleichungssystem in zwei Variablen

$$\left| \begin{array}{l} y^2 = x \\ 8y = x^2 \end{array} \right|$$

erfüllen. Dieses kann mittels Substitution von $x = y^2$ in folgende Gleichung umgeformt werden:

$8y - y^4 = y(8 - y^3) = 0$

Je nach der Definitionsmenge der gegebenen Aussageform ist unterschiedlich vorzugehen.
Im komplexen Zahlenbereich:

$\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 2, y_{3,4} = 2(\cos 120^0 \pm j\sin 120^0) = -1 \pm \sqrt{3}j$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4, x_{3,4} = -2(1 \pm \sqrt{3}j)$

oder:

$8y - y^4 = y(2 - y)(4 - 2y + y^2) = 0$

$\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 2, y_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}\,j$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4, x_{3,4} = -2(1 \pm \sqrt{3}\,j)$

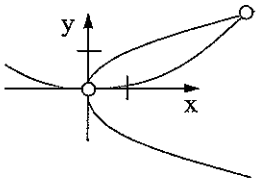
Im reellen Zahlenbereich:

$8y - y^4 = y(2 - y)(4 - 2y + y^2) = 0$

Die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks ist negativ.

$\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 2$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$



Aufgabe 301: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 + y^2 + x + 3y = 60 \end{array} \right|$$

Lösung 301: Gesucht sind Zahlenpaare (x,y), welche das vorliegende, nichtlineare Gleichungssystem in zwei Variablen

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 + y^2 + x + 3y = 60 \end{array} \right|$$

erfüllen. Es ergibt sich durch Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung folgende Gleichung:

$x + 3y = 2$

Durch Substitution von $x = 2 - 3y$ in der ersten Gleichung folgt:

$$(2 - 3y)^2 + y^2 = 58 \Rightarrow 5y^2 - 6y - 27 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 5 \cdot 27}}{5} = \frac{3 \pm 12}{5}$$

$$\Rightarrow y_1 = 3;\ x_1 = -7;\ y_2 = -\frac{9}{5};\ x_2 = \frac{37}{5}$$

Aufgabe 302: Berechnen Sie die Lösungen des Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - y = 7 \\ y^2 + x = 7 \end{array} \right|$$

Lösung 302: Gesucht sind Zahlenpaare (x,y), welche das vorliegende, nichtlineare Gleichungssystem in zwei Variablen

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - y = 7 \\ y^2 + x = 7 \end{array} \right|$$

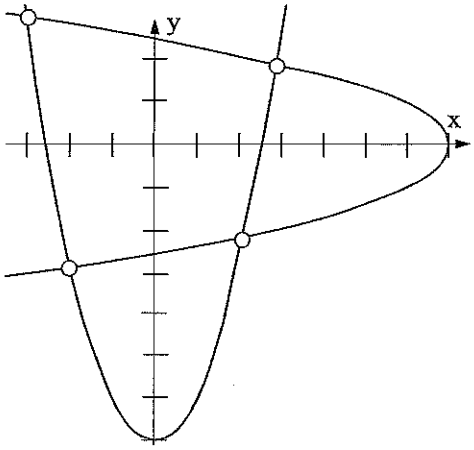
erfüllen. Die Lösungen stellen in der nebenstehenden Graphik die Schnittpunkte zweier Parabeln dar. Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt die Gleichung:

$(x - y - 1)(x + y) = 0$

Durch Substitution von $y = -x$ resp. $y = x - 1$ in der ersten Gleichung folgt: $x^2 + x - 7 = 0$ resp. $x^2 - x - 6 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}, x_4 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2, y_2 = -3, y_3 = \frac{15 - \sqrt{29}}{2}, y_4 = \frac{15 + \sqrt{29}}{2}$$



© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 303: Für welche Werte von a hat das folgende Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} (a-1)x - ay = -2 \\ (a-1)x^2 + y = 2 \end{array}\right|$$

a) keine Lösung?

b) genau eine Lösung?

c) zwei verschiedene reelle Lösungen?

d) unendlich viele Lösungen?

Lösung 303: Beim vorliegenden nichtlinearen Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} (a-1)x - ay = -2 \\ (a-1)x^2 + y = 2 \end{array}\right|$$

handelt es sich um ein einparametriges, nichtlineares System mit den zwei Variablen x und y sowie dem Parameter a. Gesucht sind alle Parameterwerte a, sodass die Mächtigkeit der Lösungsmenge entsprechend wird. Je nach der Definitionsmenge der gegebenen Aussageform ist unterschiedlich vorzugehen.

Im Komplexen gilt:

Das System kann mittels Substitution von $y = 2 - (a-1)x^2$ in die folgende quadratische Gleichung umgeformt werden:

$$(a-1)x - a(2-(a-1)x^2) + 2 = a(a-1)x^2 + (a-1)x - 2a + 2 = a(a-1)x^2 + (a-1)x - 2(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + x - 2 = 0, \text{ falls } a \neq 1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8a}}{2a}, \text{ falls } a \neq 0 \vee a \neq 1$$

a = 0: Das Gleichungssystem hat dann die folgende Form:

$$\left|\begin{array}{l} -x = -2 \\ -x^2 + y = 2 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow x = 2;\ y = 6$$

a = 1: Das Gleichungssystem hat dann die folgende Form:

$$\left|\begin{array}{l} -y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{C};\ y = 2$$

a) nie

b) $a = 0;\ a = -\frac{1}{8}$

c) $a > -\frac{1}{8}$

d) $a = 1$

oder:

Im Reellen gilt:

Die Lösungen eines Gleichungssystem zweier Variablen können als Schnittpunkt zweier Kurven betrachte werden.

Ist a = 1, so handelt es sich um die Schnittpunkte zweier Geraden:

Es gibt somit grundsätzlich keine, eine oder unendlichviele reelle Lösungen.

© 2000 Verlag ad-librum

Im vorliegenden Fall degeneriert das Gleichungssystem zu folgendenm System:

$$\left|\begin{array}{l} -y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right|$$

=> Es gibt unendlichviele reelle Lösungen.

Ist $a \neq 1$, so handelt es sich um die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel:

Es gibt somit grundsätzlich keine, eine oder 2 reelle Lösungen.

Das nichtlineare Gleichungssystem kann mittels Substitution von $y = 2 - (a - 1)x^2$ in folgende quadratische Gleichung umgeformt werden:

$(a - 1)x - a(2 - (a - 1)x^2) + 2 = a(a - 1)x^2 + (a - 1)x - 2a + 2 = a(a - 1)x^2 + (a - 1)x - 2(a - 1) = 0$

$\Leftrightarrow ax^2 + x - 2 = 0$, falls $a \neq 1$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8a}}{2a}$, falls $a \neq 0 \vee a \neq 1$

$a = 0$: Das Gleichungssystem hat dann die folgende Form:

$$\left|\begin{array}{l} -x = -2 \\ -x^2 + y = 2 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow x = 2; y = 6$

$a = 1$: Das Gleichungssystem hat dann die folgende Form:

$$\left|\begin{array}{l} -y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}; y = 2$

a) $a < -\frac{1}{8}$

b) $a = 0; a = -\frac{1}{8}$

c) $a > -\frac{1}{8}$

d) $a = 1$

Aufgabe 304: Diskutieren Sie das Gleichungssystem in den Variablen x und y:

$$\left|\begin{array}{l} (r+s)x - 2y = 2rs \\ r^2 - x(r+s) + s^2 = 2y \end{array}\right|$$

Lösung 304: Geordnet nach den Variablen:

$$\left|\begin{array}{l} (r+s)x - 2y = 2rs \\ (r+s)x + 2y = r^2 + s^2 \end{array}\right|$$

$x = \frac{1}{2}(r + s)$, falls $r \neq -s$, $y = \frac{1}{4}(r - s)^2$

Falls $r = -s$: $y = r^2$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 305: Berechnen Sie x und diskutieren Sie die Lösung: $\frac{b-x}{a+x} + \frac{c-x}{a-x} = \frac{a(c-2x)}{a^2-x^2}$

© 2000 Verlag ad-librum

Lösung 305: Die Gleichung $\frac{b-x}{a+x}+\frac{c-x}{a-x}=\frac{a(c-2x)}{a^2-x^2}$ ist nur definiert unter der Voraussetzung, dass $x \neq a \vee x \neq -a$.

$\frac{(a-x)(b-x)+(a+x)(c-x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{a(c-2x)}{a^2-x^2} \Rightarrow x=\frac{ab}{b-c}$, falls $b \neq c$

Da $x \neq \pm a \Rightarrow a \neq 0, c \neq 0, c \neq 2b$

Ist $b = c$, so lautet die Gleichung: $(b-x)\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)=\frac{a(b-2x)}{a^2-x^2}$

$\Rightarrow 2a(b - x) = ab - 2ax \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, falls $a = 0$
$\Rightarrow 2(b - x) = b - 2x$, falls $a \neq 0$
Ist $b = 0$, so ist $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, - a\}$
Ist $b \neq 0$, so gibt es keine Lösung

Zusammengefasst gilt: $x \in \begin{cases} \left\{\frac{ab}{b-c}\right\}, & \text{falls } b \neq c \wedge a \neq 0, c \neq 0, c \neq 2b \\ \mathbb{R} \setminus \{a, -a\}, & \text{falls } b = c, \text{ und } a = 0 \text{ oder } b = 0 \\ \{\}, & \text{falls } b = c \neq 0 \end{cases}$

Aufgabe 306: Lösen Sie die folgende Gleichung: $\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)-(x-b)}=\frac{a^3-b^3}{a+b}$

Lösung 306: Die gegebene Gleichung ist nur unter der Bedingung $a \neq -b$, $x \neq \frac{a+b}{2}$ definiert.

Der Zähler des linken Ausdruckes ist: $(a - x)^3 + (x - b)^3 = a^3 - b^3 - 3x(a^2 - b^2) + 3x^2(a - b)$

$\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)-(x-b)}=\frac{a^3-b^3}{a+b} \Rightarrow (a + b)(a^3 - b^3 - 3x(a^2 - b^2) + 3x^2(a - b)) = (a^3 - b^3)(a + b - 2x)$

$\Rightarrow 3x^2(a - b)(a + b) - x(3(a^2 - b^2)(a + b) - 2(a^3 - b^3)) = 0$
$\Rightarrow x(a - b)(3x(a + b) - 3(a + b)^2 + 2(a^2 + ab + b^2)) = 0$

Wenn $a = b$, dann ist x beliebig reell, aber $x \neq a$

Wenn $a \neq b$: $x_1 = 0$, $x_2 = a + b - \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \frac{a^2+4ab+b^2}{3(a+b)} \neq \frac{a+b}{2}$

In beiden Fällen ist dann $a - b \neq 0$, was vorausgesetzt ist.
Zusammengefasst gilt:

$x \in \begin{cases} \left\{0, \frac{a^2+4ab+b^2}{3(a+b)}\right\}, & \text{falls } a \neq -b \wedge b \neq a \\ \mathbb{R} \setminus \{a\}, & \text{falls } a \neq -b \wedge b = a \end{cases}$

Aufgabe 307: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie die Resultate in einfachster Form an.

a) $\left(j+\frac{1}{j}\right)^2$

b) $\frac{2-3j}{3+4j}$

Lösung 307: a) $\left(j+\frac{1}{j}\right)^2=\left(\frac{j^2+1}{j}\right)^2=0$

b) $\frac{2-3j}{3+4j}=\frac{(2-3j)(3-4j)}{(3+4j)(3-4j)}=-\frac{6+17j}{25}$

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 308: Drücken Sie den folgenden Ausdruck möglichst einfach in Komponentenform aus:

a) $\frac{2+j}{(1-j)(1+j)^5}$

b) $\frac{1}{(1+j)^4} - \frac{1}{(1-j)^3}$

c) Berechnen Sie $\frac{(z-2j)(10-|z|)}{z\bar{z}}$, für $z = 3 - 4j$

Lösung 308: a) $\frac{2+j}{(1-j)(1+j)^5} = \frac{(2+j)(1-j)^4}{2^5} = -\frac{(2+j)4}{2^5} = -\frac{1}{4} + \frac{j}{8}$

b) $\frac{1}{(1+j)^4} - \frac{1}{(1-j)^3} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1-j}{4}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{j}{4}\right)$

c) $\frac{(z-2j)(10-|z|)}{z\bar{z}} = \frac{(3+2j)5}{25} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}j$

Aufgabe 309: Bestimmen Sie die Kehrwerte der folgenden Zahlen und geben Sie das Resultat in einfachster Form an.

a) $1 + j$

b) $(1 - 4j)(3 + j)$

Lösung 309: a) $\frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-j}{2}$

b) $\frac{1}{(1-4j)(3+j)} = \frac{1}{7-11j} = \frac{(7+11j)}{(7-11j)(7+11j)} = \frac{7+11j}{170}$

Aufgabe 310: Berechnen Sie für die folgenden Zahlen den folgenden Ausdruck: $z + \frac{j}{z}$

a) $z = -2 + 3j$

b) $z = 1 + 2j$

Lösung 310: a) $z + \frac{j}{z} = 3j - 2 + \frac{j}{3j-2} = \frac{5+11j}{2-3j} = \frac{43+7j}{13}$

b) $z + \frac{j}{z} = 1 + 2j + \frac{j}{1+2j} = \frac{(1-2j)(5j-3)}{5} = \frac{7+11j}{5}$

Aufgabe 311: Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Komponentenform mit exaktem Real- und Imaginärteil:

a) $b = z - 3\bar{z}$ für $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3})$, wobei $\bar{z}$ die konjugiert komplexe Zahl von z ist

b) $w = \frac{20 - z(3+4j) + 3j}{z - j}$ für $z = 3 - 4j$

© 2000 Verlag ad-librum

c) $p = \dfrac{(2+3j)^2(3+5j)}{4\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\,\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

Lösung 311: a) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}\,j \Rightarrow b = z - 3\bar{z} = 1 + \sqrt{3}\,j - (3 - 3\sqrt{3}\,j) = -2 + 4\sqrt{3}\,j$

b) Es ist $z(3+4j) = 25$ und $z - j = 3 - 5j$

$\Rightarrow w = \dfrac{20 - z(3+4j) + 3j}{z - j} = \dfrac{-5+3j}{3-5j} \cdot \dfrac{3+5j}{3+5j} = -\dfrac{30+16j}{34} = -\dfrac{15}{17} + \dfrac{8}{17}j$

c) $p = \dfrac{(2+3j)^2(3+5j)}{4\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\,\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{(-5+12j)(3+5j)}{2\sqrt{2}(1+j)} = \dfrac{-75+11j}{2\sqrt{2}(1+j)} \cdot \dfrac{1-j}{1-j} = -\dfrac{64-86j}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{16}{\sqrt{2}} - \dfrac{43}{2\sqrt{2}}j$

Aufgabe 312: $1 + \sqrt{4}j$ ist Lösung der Gleichung $x^2 + 2bx + 2c + 5 = 0$, wobei $b, c \in \mathbb{R}$

a) Wie lautet die zweite Lösung?

b) Berechnen Sie b und c.

Lösung 312: a) Da die Koeffizienten der Gleichung $x^2 + 2bx + 2c + 5 = 0$ reell sind, hat die quadratische Gleichung zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen. Die zweite Lösung ist somit $1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\,j$

b) Nach Viëta: $b = -1 - \sqrt{2}$; $c = \sqrt{2}$

Aufgabe 313: a) Welche quadratischen Gleichungen haben $1 - j$ und $2 - j$ als Lösungen?

b) Lösen Sie die folgende Gleichung: $x^2 - 6x + 9 = 2j$

Lösung 313: a) $x_1 = 1 - j$ und $x_2 = 2 - j \Rightarrow x_1 - 1 + j = 0$ und $x_2 - 2 + j = 0 \Rightarrow (x - 1 + j)(x - 2 + j) = 0$

$\Rightarrow a(x - (1 - j))(x - (2 - j)) = ax^2 - a(3 - 2j)x + a(1 - 3j) = 0$ (komplexe quadratische Gleichung)

b) $x^2 - 6x + 9 - 2j = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2j} = 3 \pm (1 + j) \Rightarrow x_1 = 4 + j,\ x_2 = 2 - j$

Aufgabe 314: Eine Zahl, welche das Quadrat einer natürlichen Zahl ist, ist um 94 grösser als eine zweite Zahl. Das Produkt der beiden Zahlen beträgt 7200. Wie lauten die beiden Zahlen?

Lösung 314: $z(z - 94) = z^2 - 94z = 7200$, wobei $z = x^2$, $x \in \mathbb{N}$

Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, wobei die Lösung eine Quadratzahl sein soll.

$z = 47 \pm \sqrt{47^2 + 7200} = 47 \pm \sqrt{9409} \Rightarrow z_1 = 144;\ z_2 = 50$

oder:

$x^2(x^2 - 94) = x^4 - 94x^2 = 7200$, wobei $x \in \mathbb{N}$

Es handelt sich um eine biquadratische Gleichung vierten Grades.

$x = \pm\sqrt{47 \pm \sqrt{47^2 + 7200}} = \pm\sqrt{47 + \sqrt{9409}} \Rightarrow x_1 = 12;\ x_2 = -12 \Rightarrow z_1 = 144;\ z_2 = 50$

Aufgabe 315: Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

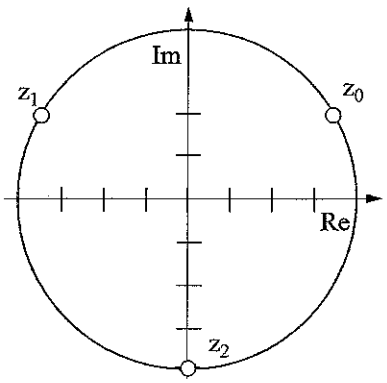
a) $z^2 + 4jz - 13 = 0$

b) $z^3 + 64j = 0$

Lösung 315: a) $z^2 + 4jz - 13 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm\sqrt{-4+13} - 2j = \pm 3 - 2j \Rightarrow z_1 = 3 - 2j;\ z_2 = -3 - 2j$

b) $z^3 + 64j = 0 \Rightarrow z^3 = -64j \Rightarrow |z| = 4;\ \arg z = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$, wobei $k \in \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow z_0 = 2\sqrt{3} - 2j;\ z_1 = 4j;\ z_2 = -2\sqrt{3} - 2j$



Aufgabe 316: Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

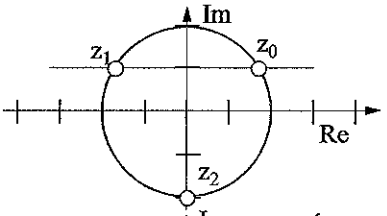
a) $z^3 + 8j = 0$

b) $z^4 + 8jz^2 - 25 = 0$

Lösung 316: a) $z^3 + 8j = 0 \Rightarrow z^3 = -8j$

$\Rightarrow |z| = 2;\ \arg z = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$, wobei $k \in \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow z_0 = \sqrt{3} - j;\ z_1 = 2j;\ z_2 = -\sqrt{3} - j$



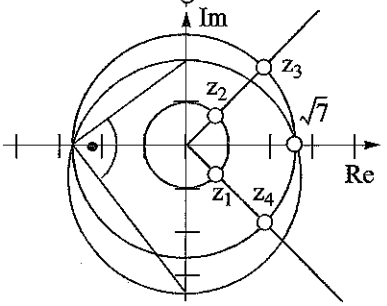
b) $z^4 + 8jz^2 - 25 = 0$ ist eine komplexe biquadratische Gleichung:

$z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-4j \pm \sqrt{-16+25}} = \pm\sqrt{-4j \pm 3}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j);\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j);$

$z_3 = \frac{\sqrt{14}}{2}(1 - j);\ z_4 = \frac{\sqrt{14}}{2}(1 + j)$

Mit Hilfe des Höhensatzes kann $|z_3| = |z_3|$ konstruktiv ermittelt werden.



Aufgabe 317: Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung: $z^3 + 4z(z - 2j) + 5z - 10j - 2jz^2 = 0$

Lösung 317: Die gegebene Gleichung $z^3 + 4z(z - 2j) + 5z - 10j - 2jz^2 = 0$ ist eine Gleichung dritten Grades in z. Die Summe ist in ein Produkt umzuformen:

$z^3 + 4z(z - 2j) + 5z - 10j - 2jz^2 = z^2(z - 2j) + 4z(z - 2j) + 5(z - 2j) = 0 \Leftrightarrow (z - 2j)(z^2 + 4z + 5) = 0$

$\Rightarrow z_1 = 2j;\ (z + 2)^2 = -1$

$\Rightarrow z_2 = -2 + j,\ z_3 = -2 - j$

Aufgabe 318: Skizzieren Sie die Menge der Punkte in der Gaussschen Zahlenebene, deren zugeordnete komplexe Zahlen z die folgende Ungleichung erfüllen: $|z - 2 + j| \le 5$

Lösung 318: Es sinnvoll, statt der gegebenen Unleichung $|z - 2 + j| \le 5$ zuerst eine einfachere Ungleichung zu diskutieren, nämlich: $|z| \le 5$

Es handelt sich um eine Kreisfläche mit dem Mittelpunkt in $z = 0$ und Radius $r = 5$

Wir zu einer komplexen Zahl z die feste komplexe Zahl $-2 + j$, so handelt es sich um eine Translation um den Vektor $2 - j$.

$\Rightarrow$ Es handelt sich um eine Kreisfläche mit Mittelpunkt $z = 2 - j$ und Radius $r = 5$.

Aufgabe 319: Skizzieren Sie in der Gaussschen Zahlenebene die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssy-

© 2000 Verlag ad-librum

stems:

$$\left|\begin{array}{l} |z-4-4j| < 4 \\ |\mathrm{Re}(jz)| < 2 \end{array}\right|$$

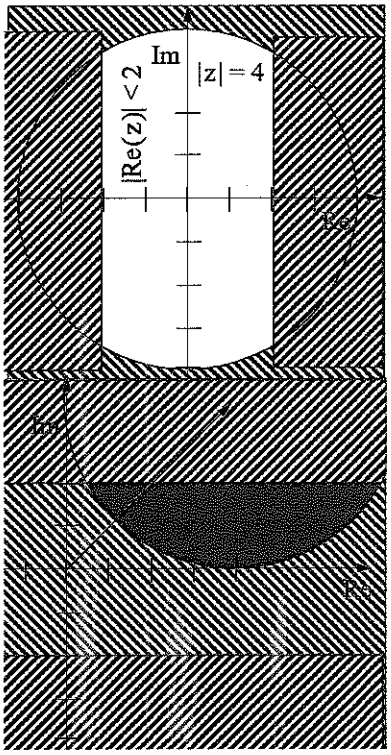
Lösung 319: Es können die beiden Ungleichungen getrennt betrachten werden. Zudem ist es sinnvoll, statt dem gegebenen System

$$\left|\begin{array}{l} |z-4-4j| < 4 \\ |\mathrm{Re}(jz)| < 2 \end{array}\right|$$

zuerst ein vereinfachtes System zu diskutieren, nämlich:

$$\left|\begin{array}{l} |z| < 4 \\ |\mathrm{Re}(z)| < 2 \end{array}\right|$$

Dabei werden die ungünstigen Gebiete weggestrichen.



Die Multiplikation von z mit j bewirkt eine Drehstreckung um den Winkel 90^0 um den Koordinatenursprung mit dem Faktor 1, während die Subtraktion von 4 + 4j eine Translation bewirkt. Die Lösungen des gegebenen Systems

$$\left|\begin{array}{l} |z-4-4j| < 4 \\ |\mathrm{Re}(jz)| < 2 \end{array}\right|$$

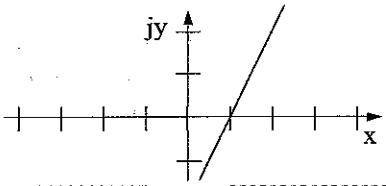
bilden ein Kreissegment.

Aufgabe 320: a) Skizzieren Sie die Menge der Punkte in der Gaussschen Zahlenebene, deren zugeordneten komplexen Zahlen z die folgende Gleichung erfüllen: $2\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 2$.

b) Skizzieren Sie die Menge der Punkte in der Gaussschen Zahlenebene, deren zugeordneten komplexen Zahlen z das folgende System erfüllen:

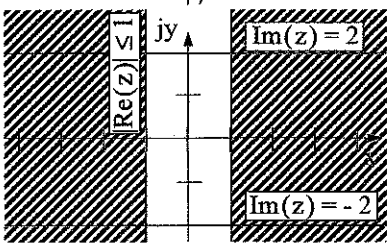
$$\left|\begin{array}{l} |\mathrm{Im}((1-j)z)| = 4 \\ |\mathrm{Re}(z-4)| \leq 1 \end{array}\right|$$

Lösung 320: a) Was in der Gaussschen Zahlenebene Real- und Imaginärteil darstellen, sind in $\mathbb{R}^2$ die Koordinaten x und y.
Bei der graphischen Darstellung der Lösungen der Gleichung $2\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 2$ handelt es sich um eine Gerade mit der Steigung 2 durch den Punkt - 2j



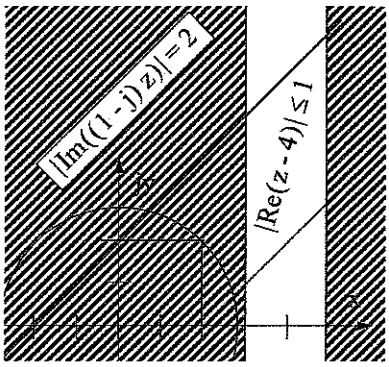
b) Es können die beiden Gleichungen resp. Ungleichungen getrennt betrachtet werden. Zudem ist es sinnvoll, statt dem gegebenen System

$$\left|\begin{array}{l} |\mathrm{Im}((1-j)z)| = 4 \\ |\mathrm{Re}(z-4)| \leq 1 \end{array}\right|$$



zuerst ein vereinfachtes System zu diskutieren, nämlich:

$$\left| \begin{array}{l} |\mathrm{Im}(z)| = 2 \\ |\mathrm{Re}(z)| \le 1 \end{array} \right|$$



Die Multiplikation von z mit 1 - j bewirkt eine Drehstreckung um den Winkel -45^0 um den Koordinatenursprung mit dem Faktor $\sqrt{2}$, während die Subtraktion von 4 eine Translation bewirkt.
Die Lösungen sind die beiden blau dargestellten Strecken.

oder:
Mit der Substitution z = x + jy, folgt aus dem ursprünglichen Ungleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{r} |\mathrm{Im}((1-j)(x+jy))| = 2 \\ |\mathrm{Re}(x+jy-4)| \le 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} |y-x| = 2 \\ |x-4| \le 1 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x+2, \text{ falls } y \ge x \\ y = x-2, \text{ falls } y < x \end{array} \right\} \wedge 3 \le x \le 5$$

Aufgabe 321: Wie lautet die Gleichung der Geraden in der Gaussschen Zahlenebene, welche durch 2 + j und 1 geht, in der komplexen Darstellung?

Lösung 321: Die Zahlen 2 + j und 1 werden in der Gaussschen Zahlenebene als Punkte dargestellt. Was in $\mathbb{R}^2$ die Koordinaten x und y darstellen, sind in der Gaussschen Zahlenebene der Real- und der Imaginärteil. Es gilt: $\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) + 1 = 0$

Aufgabe 322: Wo befinden sich die komplexen Zahlen z = x + jy, welche die Bedingung erfüllen, dass sie mit den Zahlen -1 und z^2 auf einer Geraden in der Gauss'schen Zahlenebene liegen?

Lösung 322: Seien $z_1 = -1$; $z_2 = z = x + jy$ und $z_3 = z^2 = x^2 - y^2 + 2jxy$
Die Punkte welche zu den gegebenen Zahlen gehören liegen auf einer Geraden, d.h. das Steigungsverhältnis ist konstant.

$$\Rightarrow \frac{y}{x+1} = \frac{2xy - y}{x^2 - y^2 - x} \text{ resp. } \frac{y}{x+1} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + 1}$$

$\Rightarrow y = 0 \vee x^2 - y^2 + 1 = 2x(x+1) \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$
$\Rightarrow$ Die Punkte der komplexen Zahlen liegen entweder auf der reellen Achse oder auf dem Kreis mit Mittelpunkt M(-1/0) und Radius $r = \sqrt{2}$.

Aufgabe 323: a) Für welche Werte von m hat das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rl} mx^2 + (m-1)y^2 = & 1 \\ x + \qquad\quad y = & -1 \end{array} \right|$$

keine Lösung?

b) Berechnen Sie die Lösungen für den Fall, dass es Lösungen gibt.

Lösung 323: a) Es ist zu beachten, dass es sich beim gegebenen Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rl} mx^2 + (m-1)y^2 = & 1 \\ x + \qquad\quad y = & -1 \end{array} \right|$$

um ein nichtlineares Gleichungssystem handelt. Mit der Substitution y = -x - 1 ergibt sich:

$$mx^2 + (m-1)(x+1)^2 = 1 \Rightarrow (2m-1)x^2 + 2(m-1)x + (m-2) = 0.$$

Je nach der Definitionsmenge der gegebenen Aussageform ist zu unterscheiden zwischen:

© 2000 Verlag ad-librum

Im reellen Zahlenbereich gilt: $\mathbb{R}^2$

Für $2m - 1 = 0$ handelt es sich um eine lineare Gleichung, welche genau eine Lösung aufweist. Für $2m - 1 \neq 0$ handelt es sich um eine quadratische Gleichung, welche in den reellen Zahlen keine Lösung hat, wenn die Diskriminate negativ ist:

$$m^2 - 3m + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{1 - m \pm \sqrt{-m^2 + 3m - 1}}{2m - 1}, & \text{falls } m \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leq m \\ -\dfrac{3}{2}, & \text{falls } m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = -1 - x = \begin{cases} \dfrac{-m \mp \sqrt{-m^2 + 3m - 1}}{2m - 1}, & \text{falls } m \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leq m \\ \dfrac{1}{2}, & \text{falls } m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Im komplexen Zahlenbereich gilt: $\mathbb{C}^2$

ba) In den komplexen Zahlen hat eine quadratische Gleichung stets eine Lösung. Folglich existiert kein m, für welches das Gleichungssystem keine Lösung hat.

bb) Entweder gibt es zwei Lösungen oder eine nämlich:

$$x = \begin{cases} \dfrac{1 - m \pm \sqrt{-m^2 + 3m - 1}}{2m - 1}, & \text{falls } m \neq \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{3}{2}, & \text{falls } m = \dfrac{1}{2} \end{cases} ; y = \begin{cases} \dfrac{-m \mp \sqrt{-m^2 + 3m - 1}}{2m - 1}, & \text{falls } m \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{falls } m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Aufgabe 324: Bestimmen Sie x in den folgenden Gleichungen:

a) $(b - x)(x + a) = (a + b)(b - x)$

b) $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0$

c) $abx^2 - (a + b)(ab - 1)x + (a^2 - 1)(b^2 - 1) = 0$

Lösung 324: a) $(b - x)(x + a) = (a + b)(b - x) \Leftrightarrow (b - x)(x + a) - (a + b)(b - x) = 0$
$(b - x)(x - b) = 0 \Rightarrow x = b$ ist eine doppelte Lösung.

b) $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0$ ist biquadratisch.
Diskriminante: $D = 16(a^2 + b^2)^2 - 16a^2b^2 = 16(a^4 + b^4 + a^2b^2)$
$\Rightarrow x^2 = 2(a^2 + b^2) \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + a^2b^2} \geq 0$, da $\sqrt{a^4 + b^4 + a^2b^2} \leq (a^2 + b^2)$
$\Rightarrow x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2(a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + a^2b^2})}$

c) 1. Variante:
Die Diskriminante der Gleichung $abx^2 - (a + b)(ab - 1)x + (a^2 - 1)(b^2 - 1) = 0$ lautet:

$$\begin{aligned} D &= (a + b)^2(ab - 1)^2 - 4ab(a^2 - 1)(b^2 - 1) \\ &= (a + b)^2(ab - 1)^2 - 4ab(ab + 1 - a - b)(ab + 1 + a + b) \\ &= (a + b)^2(ab - 1)^2 - 4ab((ab + 1)^2 - (a + b)^2) = (a + b)^2((ab - 1)^2 + 4ab) - 4ab(ab + 1)^2 \\ &= (ab + 1)^2((a + b)^2 - 4ab) = (ab + 1)^2(a - b)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{(a+b)(ab-1) \pm (ab+1)(a-b)}{2ab}, \text{ wenn } ab \neq 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2a^2b - 2b}{2ab} = \frac{a^2 - 1}{a}, \text{ wenn } ab \neq 0; \; x_2 = \frac{-2a + 2ab^2}{2ab} = \frac{b^2 - 1}{b}, \text{ wenn } ab \neq 0$$

Wenn $a = 0$ und $b \neq 0 \Rightarrow$ nur x_2 als Lösung.

© 2000 Verlag ad-librum

Wenn $a \neq 0$ und $b = 0 \Rightarrow$ nur x_1 als Lösung.
Wenn $a = b = 0 \Rightarrow$ keine Lösung.

2. Variante:
Die Gleichung $abx^2 - (a + b)(ab - 1)x + (a^2 - 1)(b^2 - 1) = 0$ in Faktoren zerlegen:

$$(ax - (a^2 - 1))(bx - (b^2 - 1)) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{a^2 - 1}{a}, \text{ wenn } a \neq 0;\ x_2 = \frac{b^2 - 1}{b}, \text{ wenn } b \neq 0$$

Wenn $a = b = 0 \Rightarrow$ keine Lösung.

Aufgabe 325: Bestimmen Sie x aus der folgenden Gleichung: $2x^2 + a\sqrt{b^2 + 4bx} = a(b + 2xb)$

Lösung 325: Je nach der Definitionsmenge der gegebenen Aussageform $2x^2 + a\sqrt{b^2 + 4bx} = a(b + 2xb)$ ist zu unterscheiden.

Im komplexen Zahlenbereich gilt:

$$(2x^2 - a(b + 2x))^2 = a^2(b^2 + 4bx) \Leftrightarrow 4x^4 + a^2(b + 2x)^2 - 4x^2a(b + 2x) = a^2(b^2 + 4bx)$$
$$\Leftrightarrow 4x^4 + 4a^2x^2 - 4x^2a(b + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2ax + a^2 - ab) = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ (doppelte Lösung)};\ (x - a)^2 = ab$$
$$\Rightarrow x_{3,4} = a \pm \sqrt{ab}$$

Da vorangehend quadriert wurde und damit Fremdlösungen dazukommen können, ist eine Kontrolle der Lösung unumgänglich.

$x = 0$ in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$a\sqrt{b^2} = ab \Rightarrow a = 0 \vee \sqrt{b^2} = b,$$

$\sqrt{b^2} = b$ ist aber nur erfüllt, wenn $|\arg(b)| \leq \frac{\pi}{2}$

$x = a \pm \sqrt{ab}$ in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$\Rightarrow 2(a \pm \sqrt{ab})^2 + a\sqrt{b^2 + 4b(a \pm \sqrt{ab})} = a(b + 2(a \pm \sqrt{ab}))$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(b \pm 2\sqrt{ab})^2} = -a(b \pm 2\sqrt{ab}) \Rightarrow a = 0 \vee \sqrt{(b \pm 2\sqrt{ab})^2} = -(b \pm 2\sqrt{ab})$$

$\sqrt{(b \pm 2\sqrt{ab})^2} = -(b \pm 2\sqrt{ab})$ ist aber nur erfüllt, wenn $|\arg(b \pm 2\sqrt{ab})| \leq \frac{\pi}{2}$.

Im reellen Zahlenbereich gilt:
An der algebraischen Umformungen ändert sich nichts, jedoch ist die gegebene Gleichung $2x^2 + a\sqrt{b^2 + 4bx} = a(b + 2xb)$ nur unter der folgenden Bedingung definiert: $b^2 + 4bx \geq 0$

$$(2x^2 - a(b + 2x))^2 = a^2(b^2 + 4bx) \Leftrightarrow 4x^4 + a^2(b + 2x)^2 - 4x^2a(b + 2x) = a^2(b^2 + 4bx)$$
$$\Leftrightarrow 4x^4 + 4a^2x^2 - 4x^2a(b + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2ax + a^2 - ab) = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ (doppelte Lösung)};\ (x - a)^2 = ab \Rightarrow x_{3,4} = a \pm \sqrt{ab}, \text{ falls } ab \geq 0$$

Da vorangehend quadriert wurde und damit Fremdlösungen dazukommen können, ist eine Kontrolle der Lösung unumgänglich.

$x = 0$ in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$\Rightarrow a\sqrt{b^2} = ab \Rightarrow a = 0 \vee b \geq 0$$

$x = a \pm \sqrt{ab}$ in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$2(a \pm \sqrt{ab})^2 + a\sqrt{b^2 + 4b(a \pm \sqrt{ab})} = a(b + 2(a \pm \sqrt{ab}))$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(b \pm 2\sqrt{ab})^2} = -a(b \pm 2\sqrt{ab}) \Rightarrow a = 0 \vee (b \pm 2\sqrt{ab}) \leq 0 \Rightarrow a = 0 \vee b \leq \begin{cases} -2\sqrt{ab} \\ 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

© 2000 Verlag ad-librum

$$b \le -2\sqrt{ab} \Rightarrow b \le 0 \wedge a < 0 \Rightarrow b^2 \ge 4ab \Rightarrow b \le 4a$$

$$b \le 2\sqrt{ab} \Rightarrow \begin{cases} |b| \le 2\sqrt{ab} \Rightarrow b^2 \le 4ab \Rightarrow \begin{cases} b \le 4a, \text{ falls } b \ge 0 \\ b > 4a, \text{ falls } b < 0 \end{cases} \\ b < -2\sqrt{ab} \Rightarrow b^2 > 4ab \Rightarrow b \le 4a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Zusammengefasst gilt: } \begin{cases} x_{1,2} = 0, \text{ falls } a = 0 \vee b \ge 0 \\ x_{3,4} = \begin{cases} a + \sqrt{ab}, \text{ falls } b \le 4a < 0 \\ a - \sqrt{ab}, \text{ falls } \begin{cases} 0 \le b \le 4a \\ 0 > b > 4a \\ b \le 4a < 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Aufgabe 326: Bestimmen Sie aus der folgenden Gleichung x: $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}} = \dfrac{b}{x}$

Lösung 326: Je nach der Definitionsmenge der gegebenen Aussageform $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}} = \dfrac{b}{x}$ ist zu unterscheiden.

Im reellen Zahlenbereich gilt:

Die gegebene Gleichung ist nur unter der Bedingung $x \le a$, $x \le b$, $x \ne 0$ und $a \ne b$ definiert.

$(x - b)\sqrt{a-x} = -\sqrt{b-x}\,(x + b) \Rightarrow (x - b)^2(a - x) = (b + x)^2(b - x)$

$(b - x)((b - x)(a - x) - (b + x)^2) = (x - b)((a + 3b)x - b(a - b)) = 0$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} b, \text{ falls } a \ne b \wedge b \ne 0 \wedge b \le a \\ \dfrac{b(a-b)}{a+3b}, \text{ falls } a \ne b \wedge b \ne 0 \wedge \dfrac{a-b}{a+3b} \le 1 \wedge \dfrac{b(a-b)}{a+3b} \le a \wedge a \ne -3b \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} b, \text{ falls } b \ne 0 \wedge b < a \\ \dfrac{b(a-b)}{a+3b}, \text{ falls } a \ne b \wedge b \ne 0 \wedge 0 \le 4b(a+3b) \wedge 0 \le a + 3b \wedge a \ne -3b \end{cases}$$

Falls $a = -3b$, so lautet die ursprüngliche Gleichung:

$$\frac{\sqrt{-3b-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{-3b-x}-\sqrt{b-x}} = \frac{b}{x} \Rightarrow (b - x)((b - x)(-3b - x) - (b + x)^2) = -(b - x)\,4b^2 = 0$$

Falls $b = 0$, so ist $a = 0$ und die ursprüngliche Gleichung lautet:

$\dfrac{\sqrt{-x}+\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}-\sqrt{-x}} = 0$. Diese Gleichung ist nicht definiert => keine Lösung

Falls $b \ne 0 \Rightarrow x = b$

$$\text{1. Zusammenfassung: } x = \begin{cases} b, \text{ falls } b \ne 0 \wedge b < a \\ \dfrac{b(a-b)}{a+3b}, \text{ falls } a \ne b \wedge b \ne 0 \wedge 0 \le 4b(a+3b) \wedge 0 < a + 3b \\ b, \text{ falls } a \ne b \wedge b \ne 0 \wedge 0 \le 4b(a+3b) \wedge a = -3b \end{cases}$$

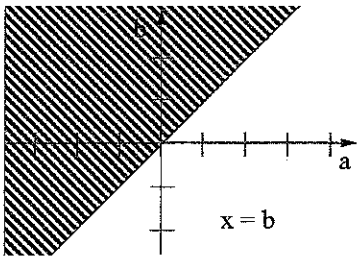
© 2000 Verlag ad-librum

Da quadriert wurde, ist eine Kontrolle unumgänglich.

x = b in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}} = \frac{b}{b} \Rightarrow \text{Die Gleichung ist erfüllt, falls } a > b \wedge b \neq 0$$

Die Lösung hängt somit von a und b ab, was in der nebenstehenden Graphik zum Ausdruck kommt, wobei das ungünstige Gebiet gestrichen wurde:



$x = \frac{b(a-b)}{a+3b}$ in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$\frac{\sqrt{a-\frac{b(a-b)}{a+3b}}+\sqrt{b-\frac{b(a-b)}{a+3b}}}{\sqrt{a-\frac{b(a-b)}{a+3b}}-\sqrt{b-\frac{b(a-b)}{a+3b}}} = \frac{b}{\frac{b(a-b)}{a+3b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+3b}}+\sqrt{\frac{4b^2}{a+3b}}}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+3b}}-\sqrt{\frac{4b^2}{a+3b}}} = \frac{b(a+3b)}{b(a-b)}$$

$$\Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = \frac{a+3b}{a-b}, \text{ falls } b \neq 0,\ a \neq b,\ a > -3b$$

Es gibt folgende 6 Fälle zu unterscheiden:

$$a+b>0 \wedge b>0 \Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = \frac{a+3b}{a-b} = \frac{a+3b}{a-b} \text{ ist erfüllt.}$$

$$a+b=0 \wedge b>0 \Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = -1 = \frac{a+3b}{a-b} = \frac{2b}{-2b} \text{ ist erfüllt.}$$

$$a+b=0 \wedge b<0 \Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = -1 = \frac{a+3b}{a-b} = \frac{2b}{-2b} \text{ ist erfüllt.}$$

Doch die Voraussetzung $a+b=0 \wedge b<0 \Rightarrow a+3b<0$ widerspricht $a>-3b$.

$$a+b>0 \wedge b<0 \Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = \frac{a-b}{a+3b} = \frac{a+3b}{a-b} \text{ ist erfüllt, falls } b(a+b)=0$$

Da aber $b \neq 0 \Rightarrow a=-b$. Dies widerspricht aber $a+b>0$

$$a+b<0 \wedge b>0 \Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = \frac{a-b}{a+3b} = \frac{a+3b}{a-b} \text{ ist erfüllt, falls } b(a+b)=0$$

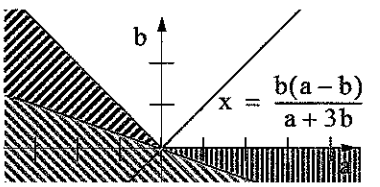
Da aber $b \neq 0 \Rightarrow a=-b$. Dies widerspricht aber $a+b<0$

$$a+b<0 \wedge b<0 \Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = \frac{a+3b}{a-b} = \frac{a+3b}{a-b} \text{ ist erfüllt.}$$

Doch die Voraussetzung $a+b<0 \wedge b<0$ widerspricht aber $a>-3b$

$$\Rightarrow \frac{|a+b|+2|b|}{|a+b|-2|b|} = \frac{a+3b}{a-b} \text{ ist nur erfüllt, wenn } a+b \geq 0 \wedge b>0$$

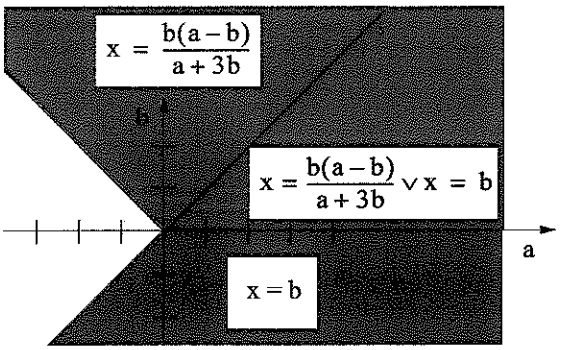
Die Lösung hängt somit von a und b ab, was in der folgenden Graphik zum Ausdruck kommt, wobei das ungünstige Gebiet gestrichen wurde:
Aus der Graphik ergibt sich, dass für a = -3b keine Lösung existiert.



2. Zusammenfassung:

$$x = \begin{cases} b, & \text{falls } b \neq 0 \wedge b < a \\ \frac{b(a-b)}{a+3b}, & \text{falls } a \neq b \wedge 0 < b \wedge -b \leq a \wedge 0 \leq 4b(a+3b) \wedge a > -3b \end{cases}$$

© 2000 Verlag ad-librum



oder:

Im komplexen Zahlenbereich gilt:

Die gegebene Gleichung ist nur unter der folgenden Bedingung definiert: $a \neq b$, $x \neq 0$

$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}} = \frac{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})^2}{a-b} = \frac{b}{x} \Rightarrow (\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})^2 x = b(a-b)$$

$$\Rightarrow (a+b-2x+2\sqrt{(a-x)(b-x)})x = b(a-b)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(a-x)(b-x)}x = b(a-b)+x(2x-a-b)$$

$$\Rightarrow 4(a-x)(b-x)x^2 = (b(a-b)+x(2x-a-b))^2$$

Dieser Weg ist des Rechenaufwands wegen nicht geeignet (Gleichung 4. Grades), obwohl der eingeschlagene Weg als Idee zum Erfolg führen könnte!

Alternative: (wie im Reellen!)

$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}} = \frac{b}{x} \Rightarrow (x-b)\sqrt{a-x} = -\sqrt{b-x}(x+b) \Rightarrow (x-b)^2(a-x) = (b+x)^2(b-x)$$

$$\Rightarrow (b-x)((b-x)(a-x)-(b+x)^2) = 0 \Rightarrow (b-x)(ab-ax-3bx-b^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} b, & \text{falls } a \neq b \wedge b \neq 0 \\ \frac{b(a-b)}{a+3b}, & \text{falls } a \neq b \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -3b \end{cases}$$

Auch im Komplexen ist eine Kontrolle unumgänglich.

$x = b$ in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}} = \frac{b}{b} \Rightarrow \text{Die Gleichung ist erfüllt, falls } b \neq 0$$

$x = \frac{b(a-b)}{a+3b}$ in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt:

$$\frac{\sqrt{a-\frac{b(a-b)}{a+3b}}+\sqrt{b-\frac{b(a-b)}{a+3b}}}{\sqrt{a-\frac{b(a-b)}{a+3b}}-\sqrt{b-\frac{b(a-b)}{a+3b}}} = \frac{b}{\frac{b(a-b)}{a+3b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+3b}}+\sqrt{\frac{4b^2}{a+3b}}}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+3b}}-\sqrt{\frac{4b^2}{a+3b}}} = \frac{b(a+3b)}{b(a-b)} = \frac{a+3b}{a-b}$$

falls $b \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq -3b$

Es ist zu beachten, dass $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+3b}} = \frac{a+b}{\sqrt{a+3b}}$ nicht allgemeingültig ist.

Falls $a = -3b$, so lautet die ursprüngliche Gleichung: $\frac{\sqrt{-3b-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{-3b-x}-\sqrt{b-x}} = \frac{b}{x}$

$$\Rightarrow (b-x)((b-x)(-3b-x)-(b+x)^2) = -(b-x)\,4b^2 = 0 \Rightarrow x = b, \text{ falls } b \neq 0$$

Falls $b = 0$, so lautet die ursprüngliche Gleichung: $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{-x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{a-x} = -\sqrt{-x}$

$$\Rightarrow a-x = -x$$

Falls $a \neq 0 \Rightarrow$ keine Lösung

Falls $a = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{C} \Rightarrow \sqrt{-x} = -\sqrt{-x} \Rightarrow x = 0$, was ein Widerspruch zu $x \neq 0$ ist
$\Rightarrow$ keine Lösung

Aufgabe 327: Bestimmen Sie x aus der folgenden Gleichung: $\sqrt{2a-b+2x} - \sqrt{10a-9b-6x} = 4\sqrt{a-b}$

Lösung 327: Je nach Definitionsmenge der gegebenen Aussageform $\sqrt{2a-b+2x} - \sqrt{10a-9b-6x} = 4\sqrt{a-b}$ ist zu unterscheiden.

Im komplexen Zahlenbereich gilt: $\mathbb{C}$

$\sqrt{2a-b+2x} - 4\sqrt{a-b} = \sqrt{10a-9b-6x}$

$\Rightarrow 2a - b + 2x + 16(a-b) - 8\sqrt{(a-b)(2a-b+2x)} = 10a - 9b - 6x$

$\Rightarrow \sqrt{(a-b)(2a-b+2x)} = x + a - b \Rightarrow (a-b)(2a-b+2x) = x^2 + 2x(a-b) + (a-b)^2$

$\Rightarrow x^2 = (a-b)(2a-b) - (a+b)^2 = a^2 - ab \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2-ab}$

Da vorangehend quadriert wurde und damit Fremdlösungen dazukommen können, ist eine Kontrolle der Lösung unumgänglich. Dabei ist zu beachten, dass die Umformung $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ im Komplexen nicht allgemeingültig ist, denn $-1 = j^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{1} = 1$.

Die Umformung $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ gilt, wenn $|\arg(a) + \arg(b)| \leq \pi$.

Im reellen Zahlenbereich gilt: $\mathbb{R}$

Die gegebene Gleichung ist nur unter der Bedingung $x \geq \frac{2a-b}{2} \wedge x \geq \frac{10a-9b}{6} \wedge a \geq b$ definiert.

$\sqrt{2a-b+2x} - 4\sqrt{a-b} = \sqrt{10a-9b-6x}$

$\Rightarrow 2a - b - 2x + 16(a-b) - 8\sqrt{(a-b)(2a-b+2x)} = 10a - 9b - 6x$

$\Rightarrow \sqrt{(a-b)(2a-b+2x)} = x + a - b \Rightarrow (a-b)(2a-b+2x) = x^2 + 2x(a-b) + (a-b)^2$

$\Rightarrow x^2 = (a-b)(2a-b) - (a+b)^2 = a^2 - ab \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2-ab}$, falls $a^2 - ab = a(a-b) \geq 0$

Da $a \geq b \wedge a(a-b) \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

Weil $a \geq b \Rightarrow x \geq \frac{2a-b}{2} \geq 0 \wedge x \geq \frac{10a-9b}{6} \geq 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{a^2-ab}$ (der negative x-Wert ist keine Lösung)

Da quadriert wurde, ist eine Kontrolle unumgänglich:

$x = \sqrt{a^2-ab}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzen:

$\sqrt{2a-b+2\sqrt{a^2-ab}} - 4\sqrt{a-b} = \sqrt{10a-9b-6\sqrt{a^2-ab}}$

$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{a-b})^2} - 4\sqrt{a-b} = \sqrt{(3\sqrt{a-b}-\sqrt{a})^2}$

$\Rightarrow |\sqrt{a}+\sqrt{a-b}| - 4\sqrt{a-b} = |3\sqrt{a-b}-\sqrt{a}|$

Daraus ergeben sich folgende Fallunterscheidungen:

$3\sqrt{a-b} - \sqrt{a} \geq 0$ d.h. $3\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a} \geq -\sqrt{a-b}$

$\Rightarrow \sqrt{a} - 3\sqrt{a-b} = 3\sqrt{a-b} - \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = 3\sqrt{a-b} \Rightarrow 9b = 8a \geq 0$

$3\sqrt{a-b} - \sqrt{a} < 0$ d.h. $-\sqrt{a-b} \leq 3\sqrt{a-b} < \sqrt{a}$

$\Rightarrow \sqrt{a} - 3\sqrt{a-b} = -3\sqrt{a-b} + \sqrt{a}$, falls $8a < 9b$

© 2000 Verlag ad-librum

Damit folgt zusammengefasst: $\begin{cases} 0 \le 8a = 9b \Rightarrow x = \sqrt{a^2 - ab} = \frac{3b}{8} = \frac{a}{3} \\ 8a \ne 9b \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{cases}$

Aufgabe 328: Stellen Sie die Graphen der folgenden Funktionen dar:

a) $g(x) = |x|x - 4|x|$

b) $f(x) = ||x|x - 4x|$

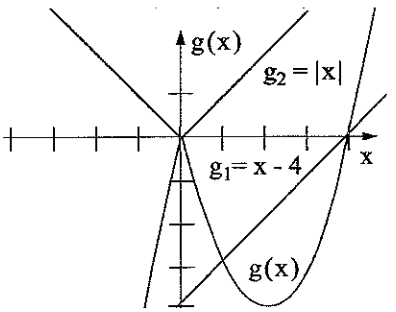
Lösung 328: a) Da dem Betrag eine Klammerungswirkung zukommt, wären zwei Deutungen möglich:

$g(x) = |x|x - 4|x| = (x - 4)|x|$ resp. $||x - 4|x^2|$

Wird der Reihe nach gegangen, so gilt:

$g(x) = (x - 4)|x| = g_1(x)g_2(x)$

Der Definitionsbereich von $g(x)$ wird durch den Betrag entsprechend in 2 Teilgebiete unterteilt, nämlich $x < 0$ und $x \ge 0$. Der Graph setzt sich aus 2 Parabelstücken zusammen. Die Nullstellen des Produnktes $g(x)$ sind die Nullstellen der Faktoren $g_1(x)$ und $g_2(x)$, nämlich 4 und 0.



oder:

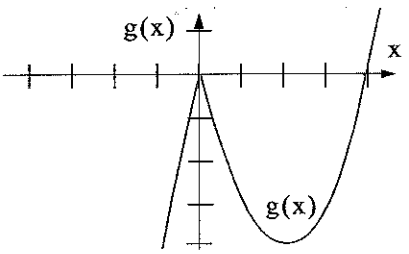
Der Definitionsbereich von g wird durch den Betrag vorerst in 3 Teilgebiete unterteilt. Der Graph setzt sich aus 3 Parabelstücken zusammen.

$x \ge 0 \Rightarrow g(x) = x^2 - 4x$

$0 \le x \le 4 \Rightarrow g(x) = x^2 - 4x$

$x \le 0 \Rightarrow g(x) = -x^2 + 4x$

Die ersten beiden Parabelteile entstehen durch dieselbe Funktion.



b) f ist positiv definit

$f(x) = ||x|x - 4x| = |(|x| - 4)x| = |f_1(x)f_2(x)|$

Die Nullstellen von $f(x)$ sind die Nullstellen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$, nämlich 4, -4 und 0.

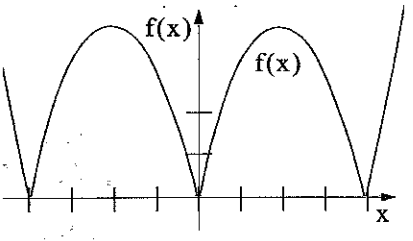
Der Definitionsbereich von f wird dadurch entsprechend in 4 Teilgebiete unterteilt. Der Graph setzt sich aus 4 Parabelstücken zusammen.

$x \ge 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x$

$0 \le x \le 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x$

$-4 \le x \le 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 4x$

$x \le -4 \Rightarrow f(x) = x^2 + 4x$ (f ist gerade)



oder:

$f(x) = ||x|x - 4x| = |(|x| - 4)x| = |f_1(x)\, f_2(x)|$

$= |f_1(x)||f_2(x)| = ||x| - 4| \cdot |x|$

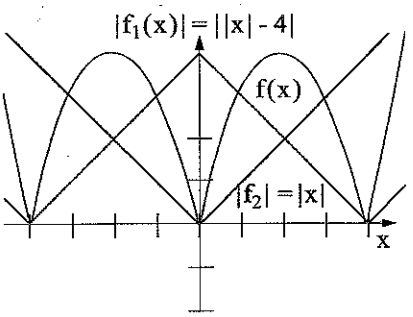
f ist gerade und gilt:

$x \ge 4 \Rightarrow f(x) = (x - 4)x$

$0 \le x \le 4 \Rightarrow f(x) = (-x + 4)x$

$-4 \le x \le 0 \Rightarrow f(x) = -(x - 4)x$

$x \le -4 \Rightarrow f(x) = (-x - 4)(-x) = (x + 4)x$

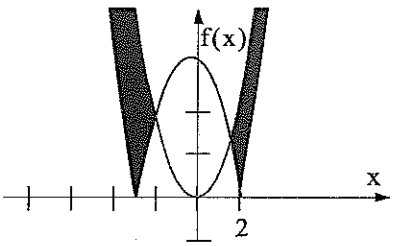


Aufgabe 329: Skizzieren Sie das Lösungsgebiet des folgenden Ungleichungssystems:

$$\left| \begin{array}{l} y \geq |x^2 + x - 6| \\ y < x^2 \end{array} \right|$$

Lösung 329: Es können die beiden Ungleichungen getrennt betrachten werden, wobei das ungünstige Gebiet gestrichen und das gültige Gebiet blau gefärbt wurde.

$$\left| \begin{array}{l} y \geq |x^2 + x - 6| \\ y < x^2 \end{array} \right|$$



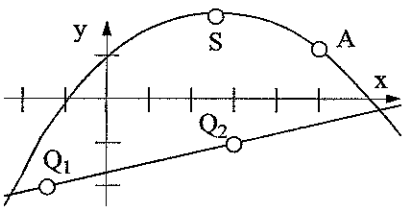
Aufgabe 330: Eine nach unten geöffnete Parabel hat den Scheitel $S(\frac{5}{2}/2)$ und geht durch den Punkt $A(5/1)$. Sie wird von der Geraden durch die Punkte $Q_1(-\frac{3}{2}/-2)$ und $Q_2(3/-1)$ geschnitten. Durch welche Ungleichungen kann das entstehende Parabelsegment beschrieben werden ?

Lösung 330: Ansatz für die Parabel mit der Scheitelpunktsgleichung:

$$y = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2$$

Einsetzen der Koordinaten von $A(5/1)$ führt auf die Gleichung:

$$y = -\frac{4}{25}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2$$

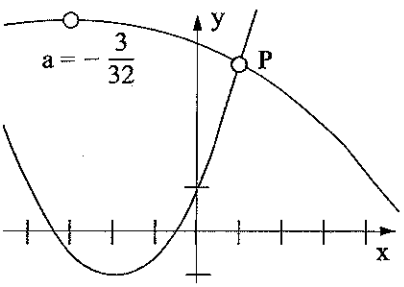


Die Gerade hat die Gleichung: $y = \frac{2}{9}(x - 3) - 1$

Das Parabelsegment wird somit beschrieben durch $y \leq -\frac{4}{25}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 \wedge y \geq \frac{2}{9}(x - 3) - 1$

Aufgabe 331: Die Parabel $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$ wird von der Parabel $y = a(x + 3)^2 + 5$ im Punkt $P(1/y_P)$ geschnitten. Bestimmen Sie den exakten Wert von a sowie die exakten Koordinaten des zweiten Schnittpunktes.

Lösung 331: Der Schnittpunkt $P(1/y_P)$ liegt auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$. Er erfüllt die Gleichung und hat die Koordinaten $P(1/\frac{7}{2})$.



Er ist auch ein Punkt der einparametrigen Parabelschar mit dem Parameter a, der Gleichung $y = a(x + 3)^2 + 5$ und dem Scheitel $S(-3/5)$ als Träger. Es gilt: $\frac{7}{2} = 16a + 5 \Rightarrow a = -\frac{3}{32}$

Für die Schnittpunkte gilt das folgende Gleichungssystem:

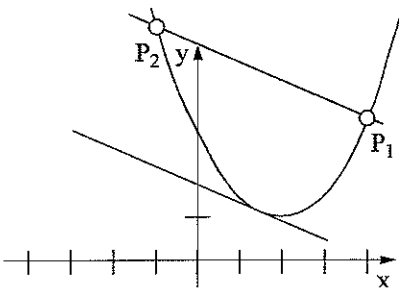
$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1 \\ y = -\frac{3}{32}(x + 3)^2 + 5 \end{array} \right|$$

$\Rightarrow 19x^2 + 82x - 101 = 0$. Da eine Lösung bekannt ist, nämlich $x_1 = 1$, ist nach dem Satz von Viëta $x_2 = -\frac{101}{19}$ und damit $y_2 = \frac{3247}{722}$.

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 332: $P_1(4/y_1)$ und $P_2(-1/y_2)$ sind Punkte der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, welche parallel zu P_1P_2 ist.

Lösung 332: $P_1(4/y_1)$ und $P_2(-1/y_2)$ liegen auf der Parabel und erfüllen somit die Gleichung $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$, womit die Koordinaten bestimmt sind.



Die Steigung der Sekante durch $P_1(4/3)$ und $P_2(-1/\frac{11}{2})$ ist

$$m = -\frac{1}{2}.$$

Der Ansatz für die Gleichung der Tangente lautet somit:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Die Tangente und die Parabel haben im Berührungspunkt zwei zusammenfallende Schnittpunkte, d.h. das folgende Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + b \end{array} \right|$$

Die Diskriminante der quadratischen Gleichung $x^2 - 3x + 6 - 2b = 0$ muss Null ergeben:

$$b = \frac{15}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{8}.$$

Aufgabe 333: Eine Parabel hat den Scheitel in $S(-2/-2)$ und geht durch den Punkt $A(1/1)$.

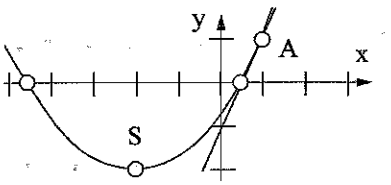
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel und ihre Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt A.

Lösung 333: a) Ansatz der Parabelgleichung:

$$y = a(x+2)^2 - 2$$

Die Koordinaten des Punktes $A(1/1)$ erfüllen die Parabelgleichung: $1 = 9a - 2$



$$y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 2$$

Nullstellen: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$

b) Ansatz für die Tangentengleichung: $y = m(x-1) + 1$

Die Schnittpunkte der Parabel mit der Geradenschar mit der Gleichung $y = m(x-1) + 1$ sind durch das folgende Gleichungssystem bestimmt:

$$\left| \begin{array}{l} y = m(x-1) + 1 \\ y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 2 \end{array} \right|$$

Die Gleichung $\frac{x^2}{3} + \left(\frac{4}{3} - m\right)x - \frac{5}{3} + m = 0$ hat eine Doppellösung bei $x = 1$, d.h.

entweder ist die Diskriminante $D = 0 = (4-3m)^2 - 4(3m-5) \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$

oder die Doppellösung ist: $x_{1,2} = 1 = \frac{4-3m}{2} \Rightarrow m = 2$

Also hat die Tangente die Gleichung $y = 2x - 1$.

© 2000 Verlag ad-librum

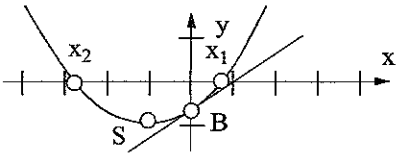
Aufgabe 334: Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

a) Bestimmen Sie den Scheitel und die Nullstellen dieser Parabel.

b) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Tangente an die Parabel, welche parallel zur Geraden $y = \frac{2}{3}x + 2$ verläuft.

Lösung 334: a) Die Nullstellen der Funktion $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ ergibt sich aus der Gleichung: $x^2 + 2x - 2 = 0$

Nullstellen $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ => Scheitel $S(-1/-1)$



b) Ansatz für die Tangente: $y = \frac{2}{3}x + b$

Die Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel sind durch das folgende Gleichungssystem bestimmt:

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + b \\ y = \frac{1}{3}(x+1)^2 - 1 \end{array} \right|$$

Die zusammenfallenden Lösungen der Gleichung $\frac{1}{3}x^2 - b - \frac{2}{3} = 0$ ergeben die x-Koordinate des Berührungspunktes:

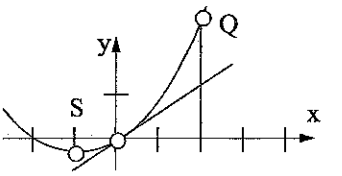
$$\Rightarrow b + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

Die Tangente hat die Gleichung $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ mit dem Berührungspunkt $B(0/-\frac{2}{3})$.

Aufgabe 335: Die Tangente an die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ berührt diese im Ursprung und hat die Steigung $\frac{2}{3}$. Die Parabel geht zusätzlich durch den Punkt $Q(2/\frac{8}{3})$. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel und geben Sie die Koordinaten ihres Scheitels M an.

Lösung 335: Da die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ durch den Ursprung und $Q(2/\frac{8}{3})$ geht, ist $c = 0$ und es gilt der Zusammenhang $4 = 6a + 3b$.

Die Tangente durch den Ursprung hat die Gleichung $y = \frac{2}{3}x$.



Die Tangente und die Parabel haben im Berührungspunkt zwei zusammenfallende Schnittpunkte, d.h. das folgende Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x \\ y = ax^2 + bx \end{array} \right|$$

Die Diskriminante der Gleichung $ax^2 + x(b - \frac{2}{3}) = 0$ ist Null zu setzen.

$\Rightarrow b = \frac{2}{3}$ und aus der Gleichung $4 = 6a + 3b$ folgt: $a = \frac{1}{3}$.

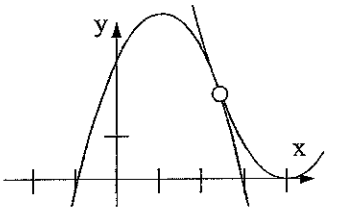
Also lautet die Gleichung der Parabel $y = \frac{1}{3}x(x + 2)$, und da der Scheitel in der Mitte zwischen den

© 2000 Verlag ad-librum

beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ liegt, sind seine Koordinaten $x_S = -1$ und $y_S = -\frac{1}{3}$.

Aufgabe 336: Die beiden Parabeln $y = -x^2 + 2x + 3$ und $y = a(x - 4)^2$ berühren sich. Bestimmen Sie den Öffnungsfaktor a und berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B.

Lösung 336: Berührung der beiden Parabeln bedeutet, sie besitzen zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit einer gemeinsamen Tangente, d.h. das folgende Gleichungssystem hat genau eine Lösung.



$$\left| \begin{array}{l} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = a(x - 4)^2 \end{array} \right|$$

Die quadratische Gleichung $x^2(a + 1) - x(8a + 2) + 16a - 3 = 0$ hat somit eine Doppellösung, d.h. die Diskriminante $D = 0 \Rightarrow (4a + 1)^2 - (a + 1)(16a - 3) = 0 \Rightarrow -5a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5}a(x - 4)^2$

Koordinaten des Berührungspunktes: $x_B = \frac{4a + 1}{a + 1} = \frac{7}{3}$, $y_B = \frac{20}{9}$

Aufgabe 337: Die Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - 4x + 7$ wird von einer kongruenten Kurve im Punkt mit der Abszisse $x = 3$ berührt. Bestimmen Sie die Gleichung einer solchen zweiten Kurve.

Lösung 337: Die Aufgabe ist unbestimmt. Es gibt beliebig viele kongruente Parabeln, welche die gegebene, gegen oben geöffnete Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 4x + 7$ im vorgegebenen Berührugnspunkt $P(3/4)$ berühren. Doch nur zwei liegen einfach im Koordinatensystem und nur eine lässt sich als Funktion von x darstellen.

Mittels quadratischer Ergänzung folgt:

$y - 3 = (x - 2)^2$

Scheitel:

$S(2/3)$

Die zweite Kurve ist eine gegen unten geöffnete Parabel, welche punktsymmetrisch bezüglich dem Berührungspunkt $P(3/4)$ zur gegebenen ist.

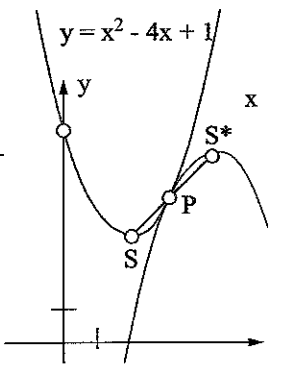
Scheitel:

$S^* = \Sigma_p(S) \Rightarrow S^*(4/5)$

Ansatz der zweiten Kurve:

$y - b = -(x - a)^2$

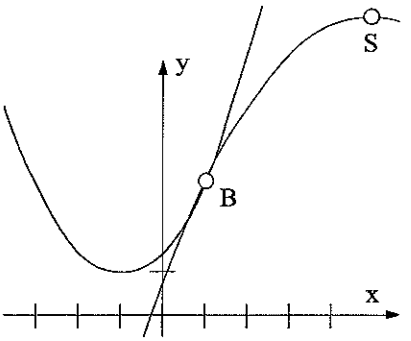
$\Rightarrow y - 5 = -(x - 4)^2 \Leftrightarrow y = -x^2 + 8x - 11$



Aufgabe 338: Die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 1$ wird von einer andern Parabel, welche den Scheitel im Punkt $S(5/7)$ hat, berührt. Bestimmen Sie die Gleichung der zweiten Parabel sowie die Koordinaten des Berührungspunktes.

© 2000 Verlag ad-librum

Lösung 338: Der Ansatz für die zweite Parabel lautet: $y = k(x - 5)^2 + 7$
Berührung der beiden Parabeln bedeutet, sie besitzen zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit gemeinsamer Tangente, d.h. das folgende Gleichungssystem hat genau eine Lösung.



$$\left| \begin{array}{l} y = k(x - 5)^2 + 7 \\ y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 1 \end{array} \right.$$

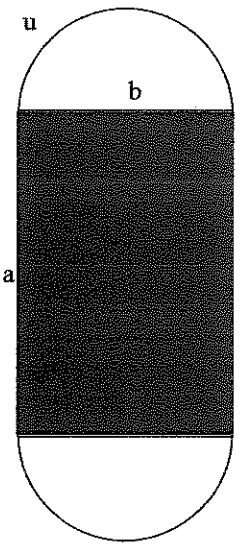
=> Die quadratische Gleichung $(x + 1)^2 + 2 = 2k(x - 5)^2 + 14$ hat zwei zusammenfallende Lösungen.

=> Diskriminante muss Null gesetzt werden: $(2 + 20k)^2 + 4(1 - 2k)(50k + 11) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

Also hat die 2. Parabel die Gleichung $y = -\frac{1}{4}(x - 5)^2 + 7$

Die Lösung der quadratischen Gleichung entspricht dann der x-Koordinate des Berührungspunktes: $x = 1 \Rightarrow B(1/3)$.

Aufgabe 339: Eine Rennbahn der Länge u soll so gebaut werden, dass die im Innern der Bahn liegende Rechtecksfläche maximal wird. Berechnen Sie die maximale Fläche, die Länge und Breite dieses Rechtecks.



Lösung 339: Sei a die Länge und b die Breite des Rechtecks.
$F(a, b) = ab$ muss Maximum annehmen unter der Bedingung, dass:

$$2a + \pi b = u \Rightarrow F(a, b) = ab = \frac{u - 2a}{\pi}a = f(a)$$

Der Scheitel der Parabel legt das Extremum fest:

$$a = \frac{u}{4},\ F_{max} = \frac{u^2}{8\pi},\ b = \frac{u}{2\pi}$$

Aufgabe 340: a) Welcher echte Bruch unterscheidet sich möglichst viel von seinem Quadrat.

b) Wieviel ist der Unterschied?

Lösung 340: Ein echter Bruch hat folgende Form: $x = \frac{a}{b} < 1$

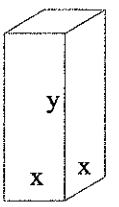
a) $d(x) = |x - x^2| = \max. \Rightarrow$ Nullstellen von d: $x_1 = 0$; $x_2 = 1 \Rightarrow$ Scheitel liegt in der Mitte: $x_s = \frac{1}{2}$

b) $y_s = \frac{1}{4}$

Aufgabe 341: Welches der geraden quadratischen Prismen, bei dem die Summe der Kantenlänge 24 cm beträgt, hat

a) die grösste Oberfläche?

b) den grössten Mantel?



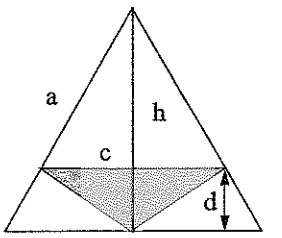
Lösung 341: a) $O(x, y) = 2x^2 + 4xy$, wobei $8x + 4y = 24 \Rightarrow O(x) = 2x^2 + x(24 - 8x) = -6x^2 + 24x$
$\Rightarrow x = 2;\ y = 2 \Rightarrow$ Würfel

b) $M(x, y) = 4xy$, wobei $8x + 4y = 24 \Rightarrow M(x) = x(24 - 8x) \Rightarrow x = \frac{3}{2};\ y = 3$
$\Rightarrow$ "Doppelwürfel"

© 2000 Verlag ad-librum

Aufgabe 342: Ein gleichseitiges Dreieck wird durch eine Parallele zu einer Seite geschnitten. Welchen Abstand haben diese beiden Parallelen von einander, damit die in der Figur dargestellte markierte Fläche maximal wird?

Lösung 342: Sei a die Seite und h die Höhe des gegebenen Dreiecks und c die Länge der vom Dreieck aus der Parallelen herausgeschnittenen Strecke



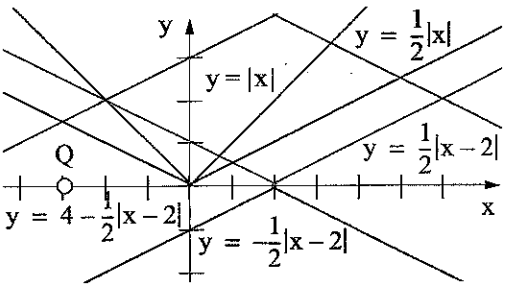
Es gilt: $\frac{a}{c} = \frac{h}{h-d}$

Fläche: $F = \frac{cd}{2} = \frac{a(h-d)d}{2}$ (quadratische Funktion!)

Wenn d = h oder d = 0 ist, so ist die Fläche Null. Damit sind aber die Nullstellen bekannt. Der Scheitel liegt in der Mitte: $d = \frac{h}{2}$

Aufgabe 343: Gegeben sind die Kurve k mit der Gleichung $y = 4 - \frac{1}{2}|x - 2|$ und der Punkt Q(-3/0). Von einem rechtwinkligen Dreieck PQR, wobei P und R dieselbe Abszisse $x \in [-3; 4]$ aufweisen, R auf der x-Achse und der Punkt P auf der Kurve k liegt, wird die Lage von P gesucht, sodass die Dreiecksfläche maximal wird.

Lösung 343: Der Graph der Funktion $y = 4 - \frac{1}{2}|x - 2|$ wird sukzessiv ermittelt.



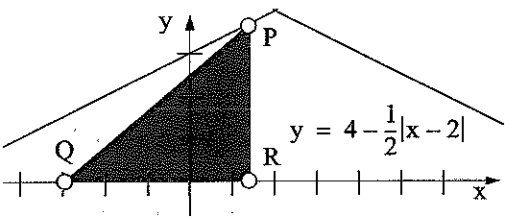
$y = |x|$

$y = \frac{1}{2}|x|$

$y = \frac{1}{2}|x - 2|$

$y = -\frac{1}{2}|x - 2|$

$y = 4 - \frac{1}{2}|x - 2|$



Die nebenstehende Skizze zeigt die Situation.

Fallunterscheidung:

x < 2:

Die Fläche nimmt mit wachsendem x zu, d.h. als Extremalstelle kommt nur die Knickstelle x = 2 in Frage.

x > 2:

Es genügt die Funktion $y = -\frac{1}{2}x + 5$ zu betrachten.

Fläche: $A_{\Delta PQR} = (x + 3)(-\frac{1}{2}x + 5)$

Diese quadratische Funktion, deren Graphen eine gegen unten geöffnete Parabel darstellt, hat die Nullstellen bei x = -3, x = 10. Der Scheitel liegt bei x = 3,5

Aufgabe 344: Gegeben sind die Kurve k mit der Gleichung $y = 3 + \frac{1}{2}|x - 4|$ und der Punkt Q(-3/0). Von einem rechtwinkligen Dreieck PQR, wobei P und R dieselbe Abszisse $x \in [-3; 5]$ aufweisen, R auf der x-Achse und der Punkt P auf der Kurve k liegt, wird die Lage von P gesucht, sodass die Dreiecksfläche maximal wird.

© 2000 Verlag ad-librum

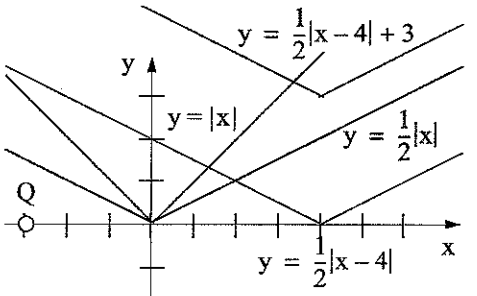
Lösung 344: Der Graph der Funktion $y = 3 + \frac{1}{2}|x - 4|$ wird sukzessiv ermittelt.

$y = |x|$

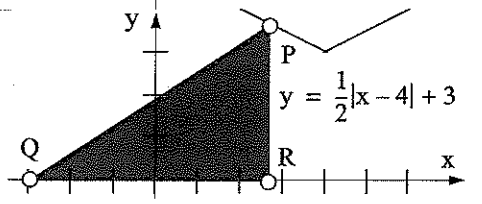
$y = \frac{1}{2}|x|$

$y = \frac{1}{2}|x - 4|$

$y = 3 + \frac{1}{2}|x - 4|$



Die nebenstehende Skizze zeigt die Situation.



Fallunterscheidung:

$x > 4$: Die Fläche nimmt mit wachsendem x zu, d.h. als Extremalstelle kommt nur die Intervallgrenze $x = 4$ in Frage.

$x < 4$: Es genügt die Funktion $y = -\frac{1}{2}x + 5$ zu betrachten.

Fläche: $A_{\Delta PQR} = (x + 3)(-\frac{1}{2}x + 5)$

Diese quadratische Funktion, deren Graphen eine gegen unten geöffnete Parabel darstellt, hat die Nullstellen bei $x = -3$, $x = 10$. Der Scheitel liegt bei $x = 3{,}5$

$x = -3$ (Stelle des absoluten Minimums)
$x = 3{,}5$ (Stelle eines lokalen Maximums)
$x = 4$ (Stelle eines lokalen Minimums)
$x = 5$ (Stelle des absoluten Maximums)

Aufgabe 345: Die beiden Körper A und B bewegen sich auf zwei zueinander normalen Geraden a und b, die sich in S schneiden. A befindet sich auf der Geraden a 10 m von S entfernt und bewegt sich mit 12 m/s auf S zu. B befindet sich auf der Geraden b, 6 m von S entfernt, und bewegt sich mit 5 m/s von S weg. Nach wievielen Sekunden ist der Abstand der beiden Objekte am kleinsten und wie gross ist dieser minimale Abstand?

Lösung 345: Die Objekte A und B haben nach der Zeit t folgende Abstände von S:

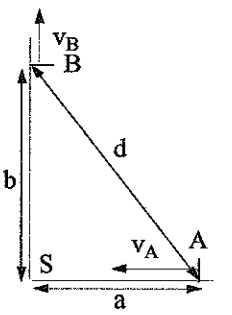
A: $a - tv_A$ resp. B: $b + tv_B$

Damit erfüllt der Abstand der beiden Körper nach der Zeit t die folgende Gleichung: $d^2(t) = (a - tv_A)^2 + (b + tv_B)^2$.

Wenn der Abstand d minimal ist, so gilt dies auch für d^2.

$d^2(t) = (10 - 12t)^2 + (6 + 5t)^2 = 169t^2 - 180t + 136 = f(t)$ soll minimal werden.

f(t) stellt eine Parabel dar, welche nach oben offen ist. Also legt der t-Wert des Scheitels das Minimum fest.



Also ist $t_{min} = \frac{90}{169}\,s = 0{,}53\,s$; $d = \sqrt{169\left(t - \frac{90}{169}\right)^2 + 136 - \frac{90^2}{169}} = 9{,}38\,m$

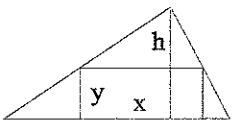
Aufgabe 346: Einem Dreieck mit der Seite a und der dazugehörigen Höhe h ist ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Rechteckseite auf die Dreieckseite a zu liegen kommt.

a) Welches Rechteck hat die grösste Fläche?

b) Wählen Sie das Rechteck so, dass der bei der Rotation um a entstehende Zylinder eine maximale Oberfläche hat.

© 2000 Verlag ad-librum

Lösung 346: Variablen einführen:



a) $F(x,y) = xy$, wobei $\frac{h}{h-y} = \frac{a}{x} \Rightarrow F(y) = \frac{a(h-y)}{h}\,y \Rightarrow y = \frac{h}{2};\ x = \frac{a}{2}$

b) $O(x,y) = 2\pi y^2 + 2\pi yx$, wobei $\frac{h}{h-y} = \frac{a}{x} \Rightarrow O(y) = 2\pi y\left(y + \frac{a(h-y)}{h}\right)$

$$\Rightarrow y = \frac{ah}{2(a-h)};\ x = \frac{a\left(h - \frac{ah}{2(a-h)}\right)}{h} = a\left(1 - \frac{a}{2(a-h)}\right) = \frac{a-2h}{2(a-h)}a\text{, wenn } a > 2h$$

Ist $a = 2h \Rightarrow$ entarteter Zylinder mit $x_{max} = 0$, $y_{max} = h$

Ist $2h > a > h \Rightarrow x < 0$, $y > 0$, was nicht möglich ist, da beide Längen positiv sein müssen.
$\Rightarrow$ Vorangehende Lösung ist ausserhalb des Definitionsbereiches.
Der Rand des Definitionsbereiches liefert somit Kandidaten für Extremalstellen.
$\Rightarrow$ entarteter Zylinder mit $x_{max} = 0$, $y_{max} = h$

Ist $a = h \Rightarrow x, y$ sind nicht definiert.
Der Rand des Definitionsbereiches liefert auch hier Kandidaten für Extremalstellen.
$\Rightarrow$ entarteter Zylinder mit $x_{max} = 0$, $y_{max} = h$

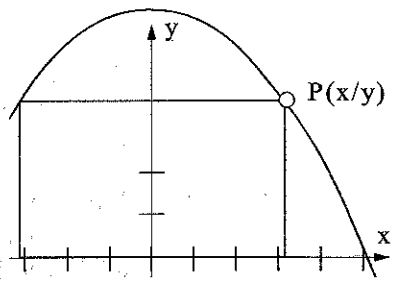
Ist $a < h \Rightarrow x > 0$, $y < 0$, was wiederum nicht möglich ist.
Der Rand des Definitionsbereiches liefert somit ebenfalls Kandidaten für Extremalstellen.
$\Rightarrow$ entarteter Zylinder mit $x_{max} = a$, $y_{max} = 0$

Aufgabe 347: Die x-Achse schneidet aus der Parabel mit der Gleichung $y = 6 - \frac{x^2}{4}$ ein Segment heraus. Man schreibe diesem ein Rechteck mit maximalem Umfang ein.

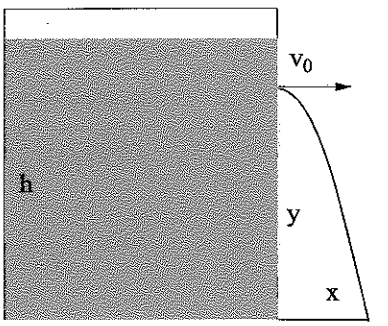
Lösung 347: Der Umfang des Rechtecks beträgt $U(x, y) = 4x + 2y = \max.$
$\Leftrightarrow 8x + 4y = \max. \Leftrightarrow 24 - x^2 + 8x = \max.$
Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 8x + 24$ ist gegen unten geöffnet und schneidet die x - Achse an den Stellen

$x = 4 \pm 2\sqrt{10} \Rightarrow$ Scheitel (4/40)

Es handelt sich um ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 2, d.h. es setzt sich aus zwei nebeneinanderliegenden Quadraten zusammen.



Aufgabe 348: Ein Zylinder ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt. Auf welcher Höhe muss man ein Loch bohren, damit das Wasser möglichst weit herausspritzt?



Lösung 348: Es gilt: $\left.\begin{array}{l} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x(y, v_0) = v_0\sqrt{\frac{2y}{g}}$ muss Maximum annehmen.

Bernoulli: $p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho gy = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh$

Unter der Annahme, dass das Loch klein ist, gilt: $p_0 \approx p_1$; $v_1 \approx 0$

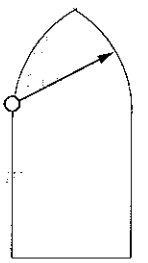
$\Rightarrow v_0^2 \approx 2g(h - y)$

$\Rightarrow x(y) = \sqrt{2g(h-y)}\sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{y(h-y)}$ muss Maximum annehmen.

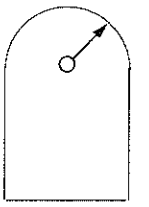
$\Rightarrow y(h - y)$ muss Maximum annehmen $\Rightarrow y = \frac{h}{2}$; $x_{max} = h$

Aufgabe 349: Ein Kirchenfenster von der folgenden Form soll mit einem Goldrahmen von U = 10 m Länge versehen werden. Wie ist das Fenster zu wählen, dass möglichst viel Licht einfällt. Schätzen Sie den Wert der Maximalfläche (ohne Taschenrechner) anhand des formalen Resultates.

a)

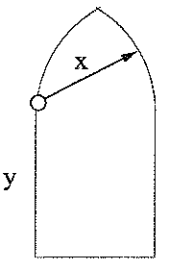


b)



Lösung 349: a) Die Fläche beträgt: $F(x,y) = xy + \frac{1}{3}\pi x^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2$

muss ein Maximum annehmen, wobei $U = x + 2y + \frac{2\pi x}{3}$. x und y sind aus der nebenstehenden Graphik ersichtlich.



$$\Rightarrow F(x) = \left(\frac{1}{3}\pi x - \frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{U - x - \frac{2\pi x}{3}}{2}\right)x = \left(\frac{U-x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}x\right)x$$

$$\Rightarrow x = \frac{4U}{4+\sqrt{3}} = \frac{4U(4-\sqrt{3})}{13} = \frac{16-4\sqrt{3}}{13}U$$

$$\Rightarrow y = \frac{3U - 3x - 2\pi x}{6} = \frac{3U - 3\left(\frac{16-4\sqrt{3}}{13}U\right) - 2\pi\left(\frac{16-4\sqrt{3}}{13}U\right)}{6}$$

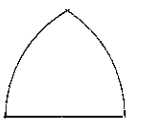
$$\Rightarrow y = U\frac{39-(3+2\pi)(16-4\sqrt{3})}{6 \cdot 13} < 0$$

Der berechnete Wert liegt ausserhalb des Definitionsbereiches.
$\Rightarrow$ Rand des Definitionsbereiches liefert somit die Kandidaten für die Extremalsstellen.
$\Rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow F_{max} = \frac{1}{3}\pi x^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2, \text{ wobei } U = x + \frac{2\pi x}{3}$$

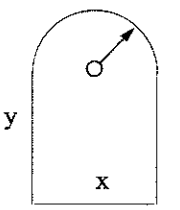
$$\Rightarrow F_{max} = \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\left(\frac{3U}{3+2\pi}\right)^2 \approx 8\ m^2$$

Damit sieht das Fenster folgendermassen aus:



b) $F(x,y) = xy + \frac{1}{8}\pi x^2$ muss ein Maximum annehmen, wobei $U = x + 2y + \pi\frac{x}{2}$.

x und y sind aus der folgenden Graphik ersichtlich.



$$\Rightarrow F(x) = \left(\frac{1}{8}\pi x + \frac{2U - 2x - \pi x}{4}\right)x = \left(-\frac{1}{8}\pi x + \frac{U-x}{2}\right)x$$

$$\Rightarrow x = \frac{2U}{4+\pi} \Rightarrow y = \frac{U}{4+\pi} \Rightarrow F_{max} = \frac{U^2}{2(4+\pi)} \approx 7\ m^2$$

Aufgabe 350: a) Wann ist die Summe der Koordinaten eines Punktes P(x/y) extremal, wenn die Koordinaten folgende Bedingungen erfüllen müssen:

$$\left| \begin{array}{l} y \geq 2x^2 \\ y \leq -2x + 4 \end{array} \right|$$

Berechnen Sie die extremalen Summen.

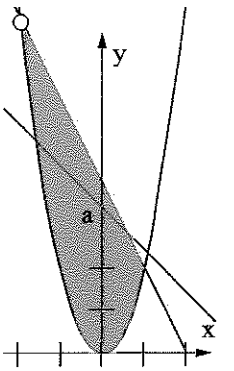
© 2000 Verlag ad-librum

b) Ändert das Weglassen eines der Gleichheitszeichen etwas an den Lösungen? Wenn ja was?

Lösung 350: a) Die Bedingungen

$$\left| \begin{array}{l} y \geq 2x^2 \\ y \leq -2x + 4 \end{array} \right|$$

können graphisch dargestellt werden, wie es in der nebenstehenden Figur zum Ausdruck kommt.



Zielfunktion: $f(x,y) = x + y =$ extremal.

f ist $\left\{ \begin{array}{l} \text{maximal} \\ \text{minimal} \end{array} \right\}$, wenn die Gerade $x + y = a$ möglichst weit $\left\{ \begin{array}{l} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$ liegt und noch das Lösungsgebiet berührt.

Maximum:

Es handelt sich um den oberen Schnittpunkt der Parabel mit der Geraden:

$x = -2,\ y = 8 \Rightarrow s_{max} = 6$

Minimum:

Berührungspunkt der Geraden mit der Gleichung $x + y = a$ mit der Parabel:

Die x-Koordinate ist Doppellösung der folgenden Gleichung:

$2x^2 + x - a = 0$

Die Diskriminante muss 0 sein: $1 + 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{8} = s_{min};\ x = -\frac{1}{4};\ y = \frac{1}{8}$

b) Je nachdem wird entweder das Maximum, das Minimum oder beide nicht angenommen.

© 2000 Verlag ad-librum